No es sorprendente que las matemáticas disfruten de un prestigio no igualado por ninguna otra actividad del pensamiento, pues son a la vez indispensables en los asuntos prácticos y la obra maestra de la abstracción pura. Sin embargo, el matemático suele ser considerado como una especie de ermitaño que invierte su tiempo creando teorías enrevesadas en una jerga árida e ininteligible.

Al concebir este libro, Edward Kasner y James Newman –ambos matemáticos de gran renombre– se propusieron ofrecer una panorámica de los diversos campos de la matemática en un lenguaje comprensible y ameno. El resultado fue un best-seller que se ha convertido en un clásico de la literatura de divulgación científica y que, a buen seguro, despertará –o aumentará– nuestro interés por esta arrogante reina del mundo intelectual.

Matemáticas e Imaginación (II)

E. Kasner J. Newman

49





Matemáticas e Imaginación (II)

Edward Kasner
James Newman

Biblioteca
Científica
Salvat


BRIAN SMITH





Matemáticas e Imaginación (II)

Biblioteca
Científica
Salvat



Matemáticas e Imaginación (II)

Edward Kasner
James Newman

SALVAT

Versión española de la obra original norteamericana *Mathematic and Imagination*, de Edward Kasner y James Newman

Revisión: Luis Bou
Diseño de cubierta: Ferran Cartes / Montse Plass

© 1994 Salvat Editores, S.A., Barcelona
© Ruth C. Newman
ISBN: 84-345-8880-3 (Obra completa)
ISBN: 84-345-8929-X (Volumen 49)
Depósito Legal: B-20176-1994
Publicada por Salvat Editores, S.A., Barcelona
Impresa por Printer, i.g.s.a., Junio 1994
Printed in Spain

ÍNDICE

TOMO II

VI. PARADOJAS PERDIDAS Y PARADOJAS RECUPERADAS

¡Cuán curioso es el comportamiento de la paradoja y cómo se mofa alegremente del sentido común!

W. S. GILBERT

Quizá la mayor de todas las paradojas es que haya paradojas en matemáticas. No nos sorprende descubrir contradicciones en las ciencias experimentales, las cuales periódicamente sufren cambios tan revolucionarios que, si hasta hace sólo muy poco tiempo nos creíamos descendientes de los dioses, hoy visitamos el zoológico con el mismo interés amistoso con que vamos a ver a parientes lejanos. Análogamente, la fundamental y remota distinción entre materia y energía desaparece, mientras la física relativista ha reducido a polvo nuestros conceptos tradicionales sobre el tiempo y el espacio. En realidad, el testamento de la ciencia está en un flujo tan continuo, que la herejía de ayer es el evangelio de hoy y el fundamento de mañana. Parafraseando a Hamlet —lo que una vez fue una paradoja, ya no lo es, pero puede nuevamente volver a serlo. Sin embargo, debido a que las matemáticas se basan en lo anterior, en lo más viejo, sin descartarlo, porque es la más conservadora de las ciencias, porque sus teoremas se deducen de postulados por los métodos de la lógica, a pesar de haber sufrido cambios revolucionarios,

no sospechamos que sea una disciplina capaz de engendrar paradojas.

Sin embargo, hay tres tipos distintos de paradojas que se presentan en las matemáticas. Hay proposiciones contradictorias y absurdas, que surgen de razonamientos falaces. Hay teoremas que parecen raros e increíbles, pero que, siendo lógicamente inexpugnables deben ser aceptados aunque trasciendan los límites de la intuición y de la imaginación. La tercera y más importante de las clases, consiste en aquellas paradojas lógicas que se presentan relacionadas con la teoría de conjuntos y que han tenido por resultado un examen de los fundamentos de las matemáticas. Estas paradojas lógicas han creado confusión y consternación entre los lógicos y los matemáticos y han dado lugar a problemas referentes a la naturaleza de las matemáticas y de la lógica que aún no han hallado una solución satisfactoria.

PARADOJAS EXTRAÑAS PERO EXACTAS

Esta sección se dedicará a proposiciones aparentemente contradictorias y absurdas, pero, sin embargo, ciertas[1]. Anteriormente examinamos las paradojas de Zenón. Casi todas ellas fueron explicadas por medio de series infinitas y de las matemáticas transfinitas de Cantor. Hay, sin embargo, otras, que implican movimiento, pero que a diferencia de las paradojas de Zenón no consisten en demostraciones lógicas de que el movimiento es imposible. No obstante ello, ilustran gráficamente cuán falsos pueden ser nuestros conceptos sobre el movimiento; cuán fácilmente, por ejemplo, uno puede ser engañado por la trayectoria de un objeto animado de movimiento.

En la figura 62 hay dos monedas idénticas. Si hacemos rodar la moneda de la izquierda a lo largo de la mitad de la

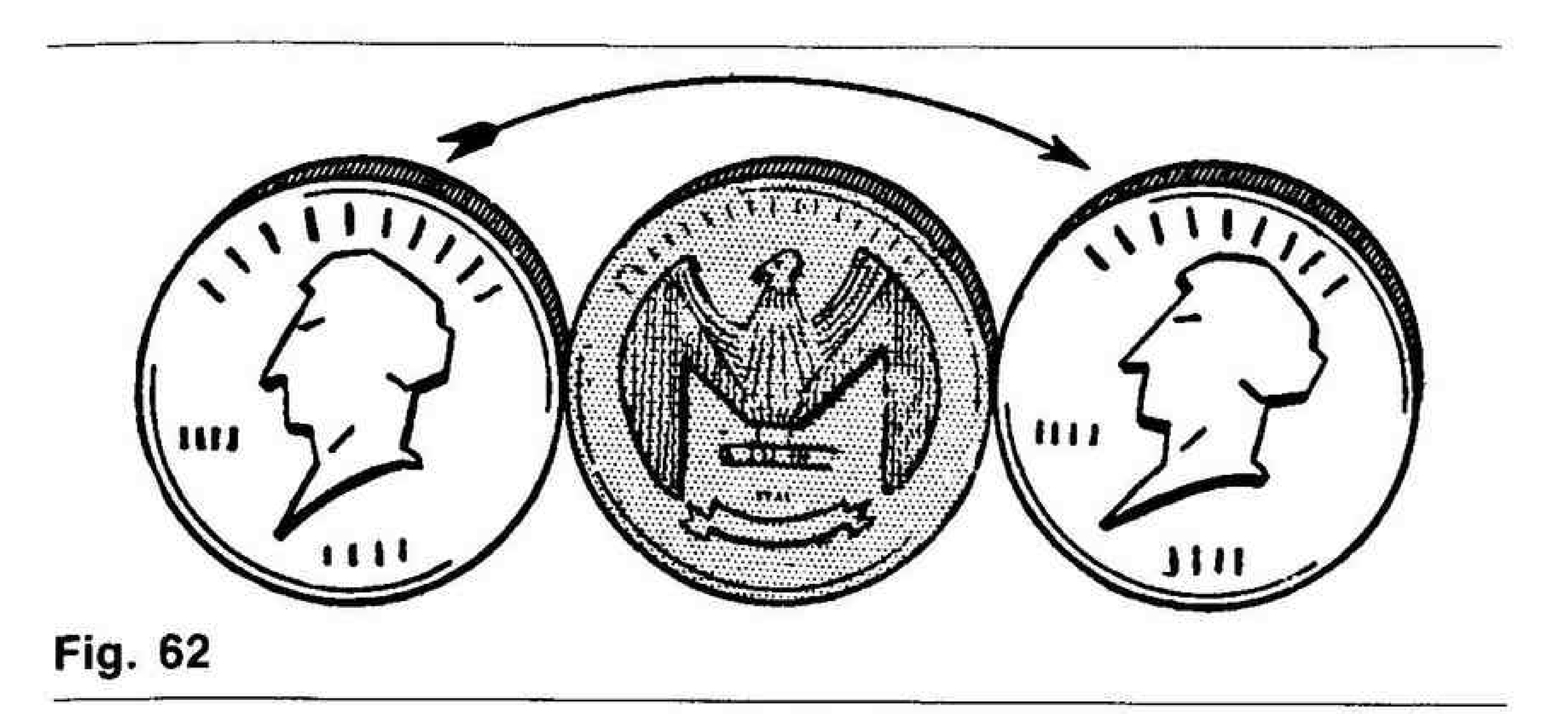


Fig. 62

circunferencia de la otra, siguiendo la trayectoria indicada por la flecha, podemos sospechar que en su posición final, al llegar al extremo de la derecha, aparece con la cabeza invertida y no en la posición inicial. Es decir, después de haber hecho girar la moneda a lo largo de una semicircunferencia (mitad de su circunferencia), la efigie que aparece en la cara de la moneda, que ha iniciado su movimiento desde una posición normal, debería quedar ahora invertida. Sin embargo, si llevamos a cabo la experiencia, veremos que la posición final será como la que se indica en la figura 62, tal como si la moneda hubiese girado una vuelta completa alrededor de sí misma.

El siguiente enigma es similar. El círculo de la figura 63

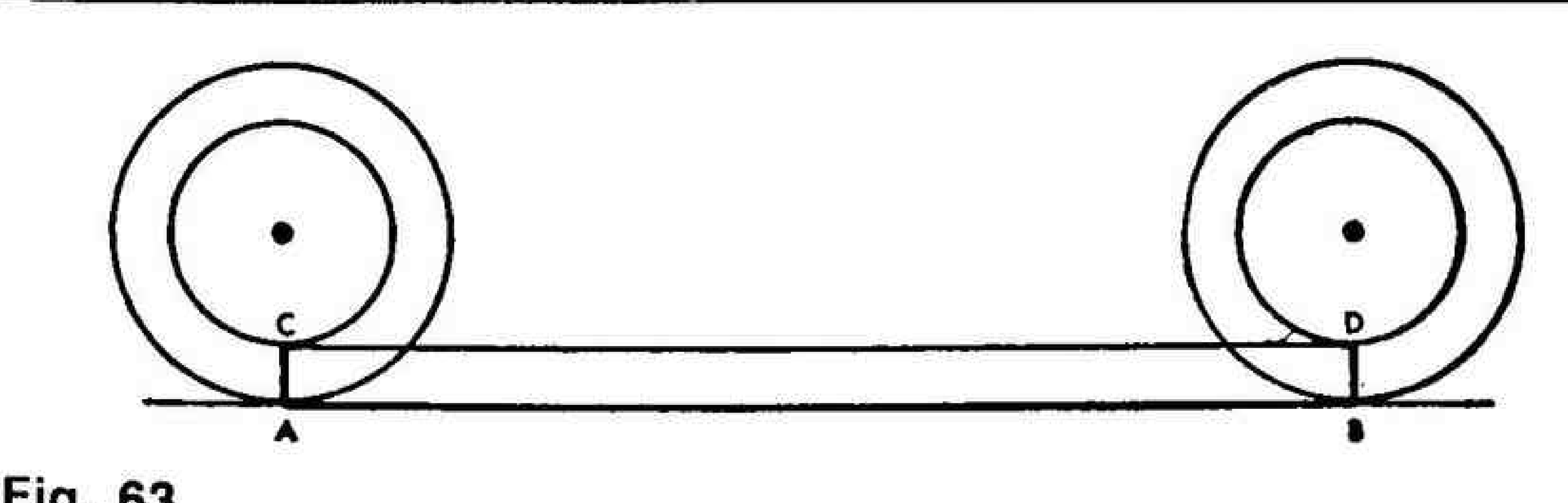


Fig. 63

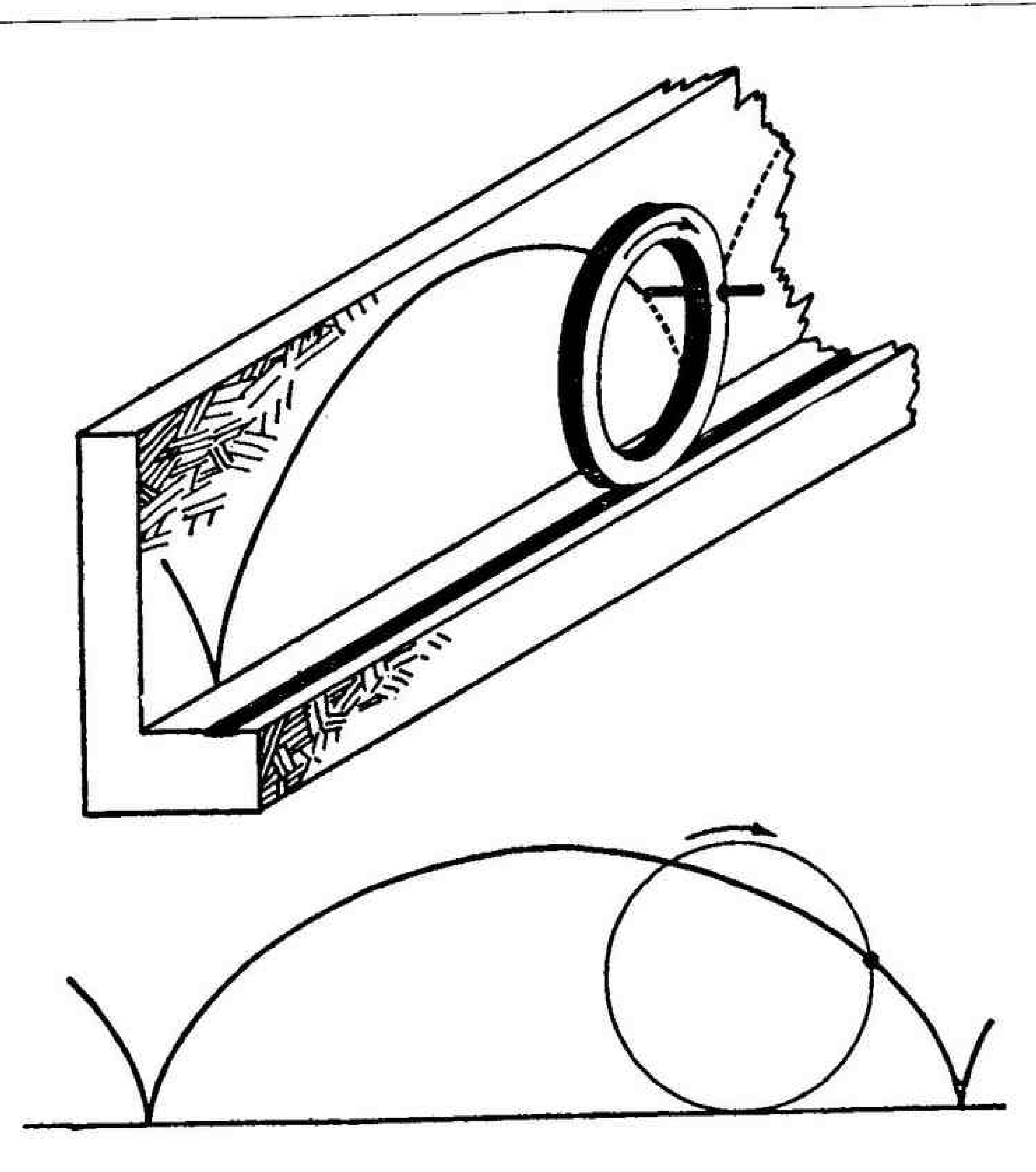


Fig. 64. La cicloide.

ha efectuado una rotación completa al rodar desde A hasta B. La distancia AB es, por lo tanto, igual a la longitud de la circunferencia del círculo. El círculo más pequeño, situado dentro del mayor, ha efectuado también una rotación completa recorriendo la distancia CD. Ya que la distancia CD es igual a la AB y cada distancia es aparentemente igual a la circunferencia del círculo que la ha desarrollado, nos hallamos ante el absurdo evidente de que la circunferencia del círculo más pequeño es igual a la circunferencia del círculo mayor.

A fin de explicar estas paradojas y varias otras de naturaleza similar, debemos dedicar nuestra atención, por un momento, a una curva famosa: la *cicloide* (véase fig. 64).

La cicloide es la curva descrita por un punto fijo de la circunferencia de una rueda que gira, sin resbalar, sobre una línea recta fija.

En la figura 65, cuando la rueda gira avanzando a lo largo de la recta MN, los puntos A y B describen una cicloide. Después que la rueda ha efectuado media rotación, el punto A_1 llega a A_3 y B_1 a B_3. A esta altura nada hay que indique que el punto A y el punto B no se hayan desplazado con la

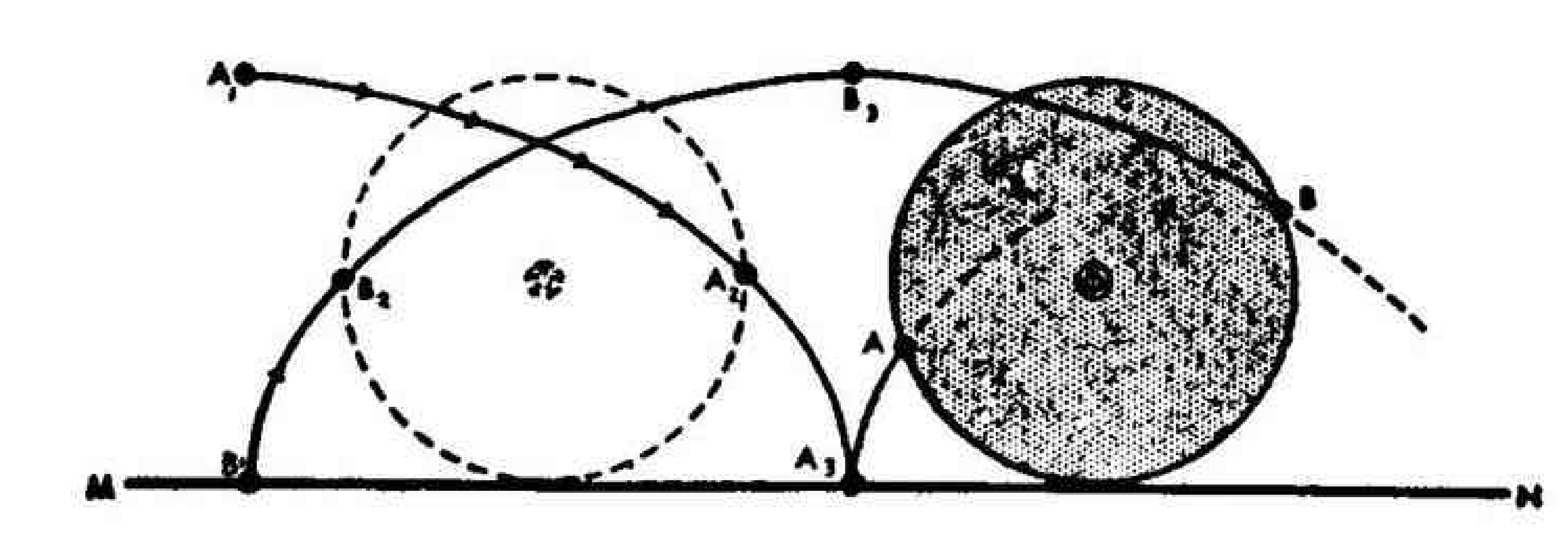


Fig. 65. Cuando la rueda se encuentra en la posición punteada, ha dado un cuarto de vuelta y el punto ha pasado de A_1 a A_2 en tanto que B sólo lo ha hecho de B_1 a B_2. El círculo sombreado indica que la rueda ha completado tres cuartos de vuelta.

misma rapidez, ya que es evidente que han cubierto la misma distancia. Pero si examinamos los puntos intermedios A_2 y B_2, que señalan las respectivas posiciones de A y B después de un *cuarto* de vuelta de la rueda, es claro que en el mismo tiempo, A se ha recorrido una mayor distancia que B. Esta diferencia queda compensada, pues en el segundo cuarto de vuelta, en el cual B va de B_2 a B_3, cubre la misma distancia que había recorrido A, moviéndose de A_1 a A_2; es evidente que la distancia sobre la curva entre B_2 y B_3 es igual en longitud a la distancia de A_1 a A_2. De ahí que, en una media ro-

tación, tanto *A* como *B* han recorrido, exactamente, la misma distancia.

Este extraño comportamiento de la cicloide explica el hecho de que, cuando una rueda está en movimiento, la parte más alejada del suelo, en cualquier instante, se mueve realmente, a lo largo y en horizontal, más rápidamente que la parte que se encuentra en contacto con el suelo.

Puede demostrarse que, a medida que el punto de una rueda, en contacto con el camino, se pone en movimiento, viaja más y más rápidamente, alcanzando su máxima rapidez horizontal cuando su posición es la más alejada del suelo.

Otra interesante propiedad de la cicloide fue descubierta por Galileo. Ya se indicó en el capítulo 31 que el área de un círculo sólo podía expresarse con ayuda de π, número trascendente. Como el valor numérico de π sólo puede calcularse aproximadamente (aunque con tanta aproximación como queramos, tomando tantos términos de la serie infinita como nos plazca), el área de un círculo puede también expresarse, únicamente, como una aproximación. Lo notable es que, sin embargo, mediante la cicloide, podemos *construir* una superficie *exactamente* igual al área de un círculo dado. Basándose en el hecho de que la longitud de una cicloide, de extremo a extremo, es igual a cuatro veces la longitud del diámetro del círculo generador, puede demostrarse que el área comprendida por la cicloide entre los dos extremos y la línea recta que los une, es igual a tres veces el área del círculo. De donde se deduce que el espacio encerrado (sombreado en la fig. 66) a cada lado del círculo, que está en el centro, es *exactamente* igual a la superficie de dicho círculo.

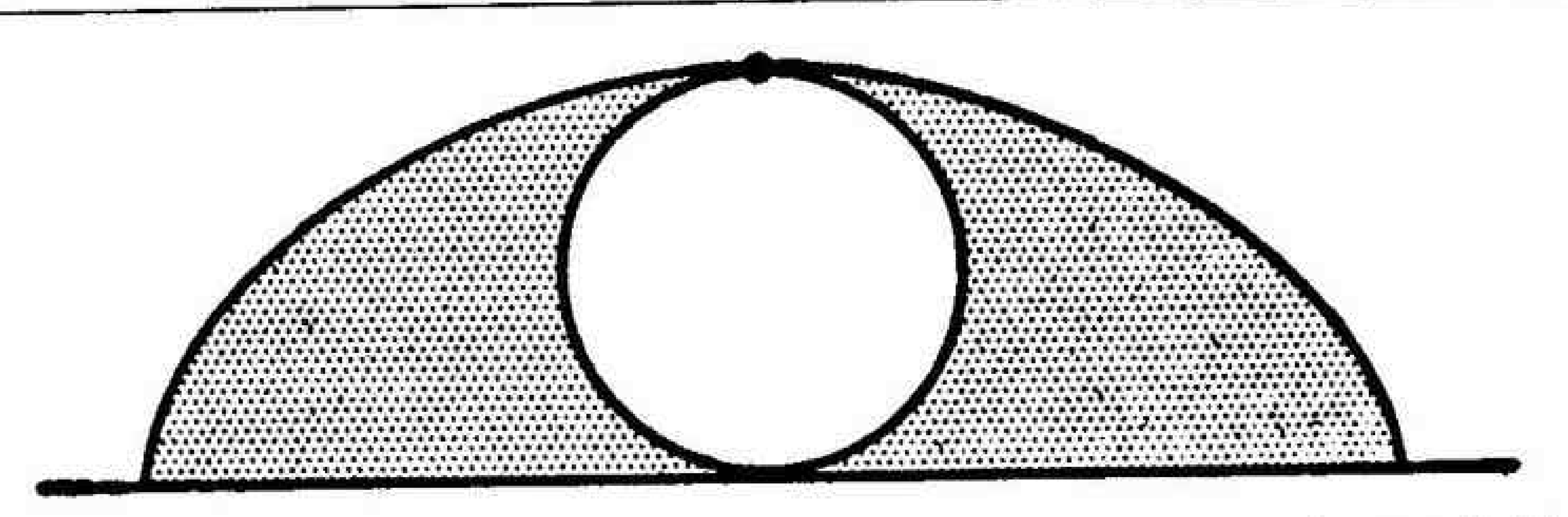


Fig. 66. Cuando el círculo rodante se encuentra en la posición indicada, las superficies sombreadas que quedan a cada uno de sus lados son exactamente iguales al área del círculo.

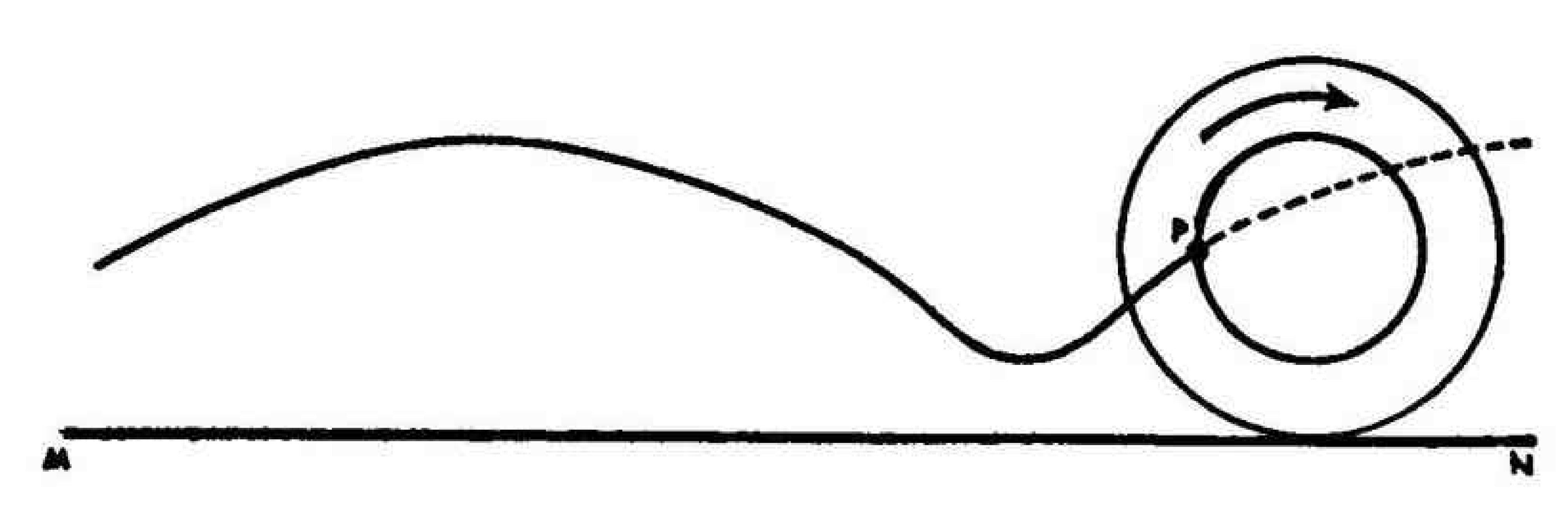


Fig. 67. La cicloide acortada está engendrada por el punto *P*, el cual pertenece al círculo pequeño, a medida que el círculo mayor rueda sobre la recta *MN*.

La paradoja que resulta de la seudodemostración de que la circunferencia del círculo pequeño es igual a la del círculo grande, puede explicarse con ayuda de otro miembro de la familia de la cicloide: la cicloide acortada* (fig. 67).

Un punto interior de una rueda que gira, sin resbalar, sobre una línea recta, describe la cicloide acortada. De este modo, un punto situado en la circunferencia del círculo menor, concéntrico con otro mayor, engendrará esta curva. El círculo pequeño de la figura 63 efectúa sólo una rotación completa al moverse de *C* a *D* y un punto sobre la circunferencia de este círculo describirá una cicloide acortada. Sin embargo, comparando la cicloide acortada con la cicloide, observamos que el círculo pequeño no cubrirá la distancia

* Se conoce con el nombre de trocoides tanto a las cicloides alargadas como a las cicloides acortadas. *(N. del R.)*

CD efectuando simplemente una revolución al mismo tiempo que el grande. Parte de la distancia es cubierta por el círculo mientras está rodando, pero simultáneamente está siendo transportado hacia delante por el círculo grande cuando éste se mueve de *A* a *B*. Puede verse esto, aún más claramente, si consideramos el *centro* del círculo grande en la figura 63. El centro de un círculo, siendo un punto matemático y careciendo, por lo tanto, de dimensiones, no gira, sino que es transportado por la rueda en toda la distancia desde *A* hasta *B*.

Considerando los problemas que surgen al rodar una rueda sobre una línea recta, hemos estudiado la trayectoria de un punto situado sobre la circunferencia de la misma y vimos que esta trayectoria era una cicloide; al considerar la curva trazada por un punto del interior de la rueda, descubrimos la cicloide acortada. Además es interesante mencionar la trayectoria determinada por un punto situado *fuera* de la circunferencia, tal como un punto extremo de la pestaña de una rueda de vehículo ferroviario. Dicho punto no está en contacto con el riel sobre el cual gira la rueda y la curva que engendra es una cicloide alargada (fig. 38). Esta curva explica la curiosa paradoja de que, en cualquier instante, el tren nunca se mueve por completo en el sentido en que lo arrastra la máquina. ¡Hay siempre partes del tren que se mueven en el sentido opuesto!

Entre las innovaciones, en matemáticas, del primer cuarto de siglo, ninguna eclipsa en importancia al desarrollo de la teoría de los conjuntos de puntos y la teoría de las funciones de una variable real. Basándose totalmente en los nuevos métodos del análisis matemático, se logró un rigor y una generalidad en la geometría, mayores de lo que podría haberse imaginado si la ciencia se hubiese desarrollado enteramente por medios intuitivos. Se encontró que todos los conceptos geométricos convencionales podían ser definidos nuevamen-

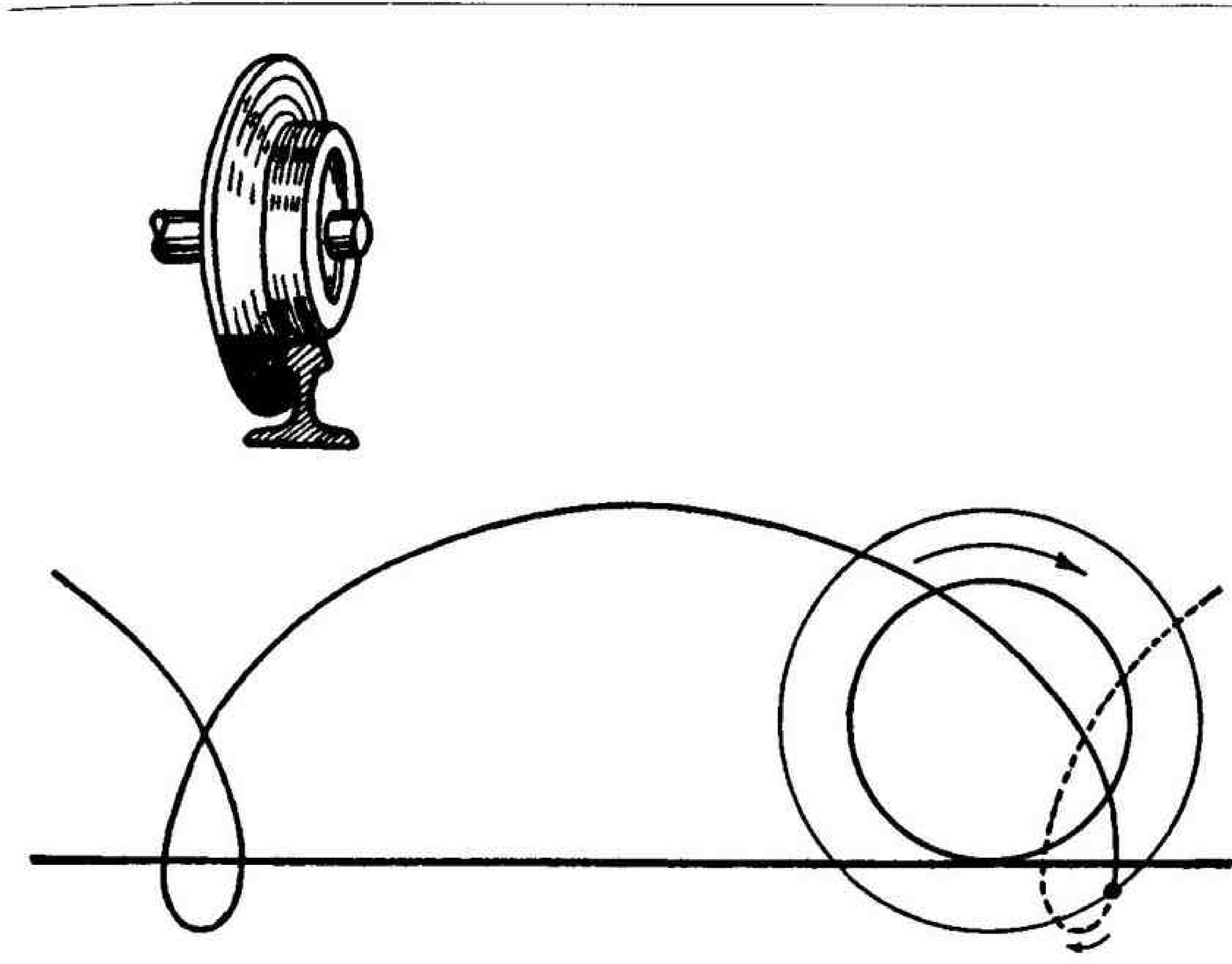


Fig. 68. La cicloide alargada. Un punto perteneciente a la pestaña de una rueda de ferrocarril, en movimiento, da origen a esta curva. La parte del tren que se mueve *hacia atrás* cuando el tren marcha hacia delante es la porción sombreada de la rueda.

te con acrecentada exactitud, basándose en la teoría de los conjuntos y en los nuevos y poderosos instrumentos del análisis. En la geometría de la lámina de goma, como veremos más adelante, las curvas se definen de tal manera, que se elimina toda ingenua apelación a la intuición y a la experiencia. Una curva cerrada simple se define como un conjunto de puntos que posee la propiedad de dividir al plano exactamente en dos regiones: una *interior* y la otra *exterior*, donde las nociones *interior* y *exterior* se formulan con precisión, por métodos analíticos, sin hacer referencia alguna a nuestras nociones ordinarias de espacio. Precisamente por dichos medios se crearon e investigaron figuras mucho más complejas

que las que hasta entonces se habían estudiado. En realidad, aunque la geometría analítica se limita a contornos que pueden describirse mediante ecuaciones algebraicas cuyas variables son las coordenadas de los puntos de la figura, el nuevo análisis hizo posible el estudio de formas que *no pueden* ser descritas por ecuación algebraica *alguna*. Algunas de éstas las encontraremos en la parte dedicada a curvas patológicas.

También se emprendieron estudios intensivos de ciertas clases de puntos —como los puntos en el espacio— y se examinó la noción de dimensión. En relación con este estudio, uno de los grandes éxitos de los últimos años ha sido el de asignar un número: 0, 1, 2 ó 3, a cada configuración, para denotar su dimensión. Prevalecía la creencia de que ésta era una cuestión simple y evidente, que no requería análisis matemático y que podía resolverse intuitivamente. Así, podía decirse de un punto, que tenía dimensión nula, una recta o una curva: una dimensión, un plano o una superficie: dos dimensiones y un sólido: tres dimensiones. Debe admitirse que el problema de determinar si un objeto tiene 0, 1, 2 ó 3 dimensiones no parece muy formidable. Sin embargo, una notable paradoja que fue descubierta es suficiente, en sí misma, para demostrar que no es así y que nuestras ideas intuitivas acerca de dimensión, así como sobre áreas, no sólo carecen de precisión, sino que a menudo son completamente engañosas.

La paradoja apareció al tratar de determinar si podía asignarse a cada figura del plano un único número (llamada medida) de manera tal que pudieran satisfacerse las tres condiciones siguientes:

1. Si se atribuye a la palabra "congruente" la misma acepción que se le dio en la geometría elemental[2], dos figuras congruentes deben tener la misma medida.
2. Si una figura fuese dividida en dos partes, la suma de

MORENO

las medidas asignadas a cada una de las dos partes debe ser exactamente igual a la medida asignada a la figura original.
3. Como modelo para determinar el método de asignar una medida a cada figura del plano, se acordó que debía asignarse la medida 1 al cuadrado cuyos lados tienen por longitud una unidad.

¿Qué es este concepto de medida? De acuerdo a lo anterior, parecería deducirse que la *medida* que se asigna a cada figura en el plano, no es otra cosa que el área de esa figura. En otras palabras, el problema consiste en determinar si el *área de toda figura* en el plano haciendo caso omiso de su complejidad, puede determinarse sin ambigüedad. Inútil señalar que fue propuesto como un ejercicio teórico y general y no como la enorme y evidentemente imposible empresa de medir realmente toda figura concebible. El problema podía considerarse resuelto si se diera una demostración teórica de que, a *toda figura*, podía serle asignada una única medida. Pero debe notarse que la finalidad principal era liberar a esta investigación de los conceptos tradicionales de la geometría clásica: la noción de área, entendida del modo antiguo, era desterrada y se excluían específicamente los métodos usuales para determinarla; la aproximación debía ser *analítica* (por medio de conjuntos de puntos) antes que geométrica. Cumpliendo tales restricciones se demostró que por complicada que sea una figura, y por mucho que su contorno se cruce y se vuelva a cruzar, puede asignársele una única medida.

Entonces vino el desastre, pues se descubrió el hecho sorprendente de que el mismo problema, al ser generalizado a superficies en el espacio, no sólo era insoluble, sino que conducía a las más graciosas paradojas. En efecto, los mismísimos métodos que habían sido tan fecundos en las investigaciones sobre el plano, cuando se aplicaban a la superficie

de una esfera, eran inadecuados para determinar una medida única.

¿Significa esto realmente que el área de la superficie de una esfera no puede determinarse de una manera única? ¿No da, acaso correctamente, el área de la superficie de una esfera la fórmula habitual, $4\pi r^2$? Desgraciadamente no podemos contestar estas preguntas en detalle, porque ello nos llevaría muy lejos y exigiría muchos conocimientos técnicos. Admitimos que el área de una superficie esférica, determinada por los viejos métodos clásicos, es $4\pi r^2$. Pero los viejos métodos carecían de generalidad, eran inadecuados para determinar la superficie de figuras complejas; además, ya advertimos que el concepto intuitivo de área debía omitirse deliberadamente en la tentativa de medida. Al mismo tiempo que el progreso en la teoría de las funciones y los nuevos métodos del análisis superaron algunas de estas dificultades, introdujeron también nuevos problemas estrechamente relacionados con el infinito; y como los matemáticos saben desde hace mucho tiempo, la presencia de ese concepto no constituye, en modo alguno, una bendición. Aunque ha permitido a los matemáticos realizar grandes adelantos, éstos han estado siempre a la sombra de la incertidumbre. Uno puede continuar empleando fórmulas tales como $4\pi r^2$ por la magnífica razón de que resuelven un problema, pero si se desea ir al mismo paso que el audaz e inquieto espíritu matemático, se ve obligado a hacer frente a las desalentadoras alternativas de abandonar la lógica para retener los conceptos clásicos, o la de aceptar los resultados paradójicos del nuevo análisis y hacer a un lado al sentido común práctico.

Las condiciones para asignar una medida a una superficie son análogas a las que se presentan cuando se trata de las figuras en el plano: 1) Debe asignarse una misma medida a superficies congruentes. 2) La suma de las medidas asignadas a cada una de las dos partes componentes de una superficie

deberá ser igual a la medida asignada a la superficie original. 3) Si S indica toda la superficie de una esfera de radio r, la medida asignada a S deberá ser: $4\pi r^2$.

El matemático alemán Hausdorff demostró que este problema no tiene solución, que *no puede* asignarse una medida única a las partes de la superficie de una esfera de modo tal que se satisfagan las condiciones que anteceden. Demostró que si la superficie de una esfera fuese dividida en tres partes separadas y distintas: A, B, C, de manera que A sea congruente con B y B sea congruente con C surge una extraña paradoja, que nos recuerda vívidamente algunas de las paradojas de la aritmética transfinita con las cuales está, en realidad, relacionada. Hausdorff demostró que no solamente A es congruente con C (como podía esperarse), *sino también* que A es congruente con $B + C$. ¿Cuáles son las complicaciones de este alarmante resultado?

Si se asigna una medida a A, a la misma medida debe asignarse a B y a C, ya que A es congruente con B, B con C y A con C. Pero, por otra parte, como A es congruente con $B + C$, la medida asignada a A tendría también que ser igual a la suma de las medidas asignadas a B y a C. Evidentemente dicha relación sólo podría cumplirse si las medidas asignadas a A, B y C fuesen todas iguales a 0. Pero eso es imposible por la condición 3), de acuerdo a la cual la suma de las medidas asignadas a las partes de la superficie de una esfera debe ser igual a $4\pi r^2$. ¿Cómo es posible entonces asignar una medida?

Desde un punto de vista ligeramente distinto, vemos que si A, B y C son congruentes entre sí y reunidas forman la superficie de toda la esfera, la medida de cualquiera de ellas debe ser la medida de un tercio de la superficie de toda la esfera. Pero si A es no solamente congruente con B y C, sino también con $B + C$ (como lo demostró Hausdorff), la medida asignada a A y la medida asignada a $B + C$, deben ser, cada

una, igual a la mitad de la superficie de la esfera. Así, de cualquier manera que lo encaremos, asignando medidas a porciones de la superficie de una esfera, nos enredamos en una contradicción sin remedio.

Dos distinguidos matemáticos polacos, Banach y Tarski, han hecho extensivas las deducciones del paradójico teorema de Hausdorff al espacio de tres dimensiones, con resultados tan sorprendentes e increíbles que no tienen igual en todas las matemáticas. Y las conclusiones, aunque rigurosas e intachables, son casi tan increíbles tanto para el matemático como para el lego.

Imaginemos dos cuerpos en el espacio de tres dimensiones: uno muy grande, como el Sol; el otro muy pequeño, como un guisante. Indiquemos el Sol con S y el guisante con S'. Recordemos ahora que nos estamos refiriendo, no a las superficies de estos dos objetos esféricos sino a la *totalidad de las esferas sólidas tanto del Sol como del guisante*. El teorema de Banach y Tarski afirma que puede llevarse a cabo, teóricamente, la siguiente operación:

Dividamos al Sol S en muchísimas partes pequeñas. Cada parte debe ser separada y distinta y el número total de partes será un número finito. Las mismas podrán designarse por $s_1, s_2, s_3 \dots s_n$ y, al ser reunidas, estas pequeñas partes formarán toda la esfera S. Análogamente S' —el guisante— debe dividirse en igual número de partes mutuamente excluyentes: $s'_1, s'_2, s'_3 \dots s'_n$, que reunidas formarán el guisante. Luego, la proposición prosigue diciendo que si el Sol y el guisante han sido cortados de una manera tal que la pequeña porción s_1 del Sol sea congruente con la pequeña porción s'_1 del guisante, s_2 congruente con s'_2, s_3 congruente con s'_3, hasta s_n congruente con s'_n, este proceso acabará, no sólo con todas las pequeñas porciones del guisante, *sino también con todas las pequeñas porciones del Sol*.

En otras palabras, el Sol y el guisante pueden ser divididos en un número finito de partes desunidas de *manera que cada parte simple de uno sea congruente con una única parte del otro, y de tal modo que después que cada pequeña porción del guisante ha sido equiparada con una pequeña porción del Sol, no quede libre ninguna de éstas**.

Para expresar esta gigantesca explosión de bomba en términos comparables al estallido de un pequeño cohete, diremos: *Hay una manera de dividir una esfera grande como el Sol, en partes separadas, de manera que no haya dos de esas partes que tengan puntos comunes y, sin comprimir ni deformar parte alguna, todo el Sol puede colocarse, cómodamente, en el bolsillo del chaleco*. Además, podrán disponerse de tal manera las partes componentes del guisante que, sin expansión ni deformación, no teniendo puntos comunes ningún par de sus partes, *llenarán sólidamente todo el Universo no quedando ningún espacio vacío, ya sea en el interior del guisante, o en el Universo*.

Ciertamente que ningún cuento de hadas, ninguna fantasía de las Mil y una noches, ningún sueño febril, puede competir con este teorema de inflexible y rigurosa lógica. Aunque los teoremas de Hausdorff, Banach y Tarski no pueden, actualmente, tener aplicación práctica alguna, ni aun para aquellos que esperan acomodar su voluminoso equipaje en un maletín de fin de semana, quedan como un magnífico desafío a la imaginación y como un tributo a la concepción matemática[3].

Se distinguen de las paradojas consideradas hasta ahora, aquellas que se refieren, más propiamente, a los sofismas

* Reconocemos aquí, por supuesto, que se trata de una simple correspondencia biunívoca entre los elementos de un conjunto que forman el Sol y los elementos de otro conjunto que constituyen el guisante. La paradoja reside en el hecho de que cada elemento se equipara con otro que le es completamente congruente (a riesgo de repetir que congruente significa idéntico en tamaño y forma) y que hay bastantes elementos en el conjunto que forma el guisante como para equipararlos exactamente con los elementos que constituyen el Sol.

matemáticos. Se presentan tanto en aritmética como en geometría y se les encuentra, a veces, aunque no muy a menudo, en las ramas superiores de las matemáticas como, por ejemplo, en el cálculo o en las series infinitas. Algunos sofismas matemáticos son demasiado triviales para merecer atención; sin embargo, el tema tiene derecho a que le dediquemos nuestra consideración porque, aparte de su aspecto entretenido, muestra cómo un encadenamiento de razonamientos matemáticos puede ser viciado totalmente por un solo paso en falso.

SOFISMAS ARITMÉTICOS

I. A casi todos nosotros nos resulta familiar una demostración según la cual 1 es igual a 2. Dicha prueba puede hacerse extensiva a la demostración de que dos números o expresiones *cualesquiera* son iguales. El error común a todas esas falacias consiste en dividir entre cero, operación estrictamente prohibida. Sabido es que las reglas fundamentales de la aritmética exigen que todo proceso aritmético (suma, resta, multiplicación, división, elevar a una potencia y obtener las raíces de un número) produzca un resultado único. Evidentemente este requisito es esencial, porque las operaciones de la aritmética tendrían poco valor o significado, si los resultados fuesen ambiguos. Si 1 + 1 fuese igual a 2 ó a 3; si 4 × 7 fuese igual a 28 ó a 82; si 7 ÷ 2 fuese igual a 3 ó a 3½, las matemáticas serían el Sombrerero Loco de las ciencias. Al igual que la buenaventura o la frenología serían asunto apropiado para explotar en una concesión de parque de atracciones.

Ya que los resultados de la operación de división deben ser únicos, la división entre cero *debe* ser excluida, por cuanto el resultado de esta operación es cualquier cosa que a usted se le ocurra. En general, la división está definida de tal modo que si a, b y c son tres números, $a \div b = c$, *solamente cuando* $c \times b = a$. De acuerdo a esta definición, ¿cuál es el resultado de $5 \div 0$? No puede ser ningún número de cero a infinito, puesto que ningún número, al ser multiplicado por cero, es igual a 5. Por lo tanto, $5 \div 0$ no tiene sentido y más aún, $5 \div 0 = 5 \div 0$ es una expresión que carece de significado.

Por supuesto que los sofismas resultantes de dividir por cero, rara vez se presentan de manera tan simple como para ser descubiertos a primera vista. El siguiente ejemplo nos da una idea de cómo surgen las paradojas cuando dividimos por una expresión cuyo valor es cero:

Supongamos que: $A + B = C$ y admitamos que $A = 3$ y $B = 2$.

Multipliquemos ambos miembros de la ecuación $A + B = C$ por $(A + B)$.

Obtenemos:

$$A^2 + 2AB + B^2 = C(A + B).$$

Cambiando el orden de los términos tenemos:

$$A^2 + AB - AC = -AB - B^2 + BC.$$

Al sacar factor común $(A + B - C)$, tenemos:

$$A(A + B - C) = -B(+A + B - C).$$

Dividiendo ambos miembros entre $(A + B - C)$, es decir, dividiendo entre cero, obtenemos: $A = -B$, o $A + B = 0$, que es evidentemente absurdo.

II. Al extraer raíces cuadradas, es necesario recordar la regla algebraica que dice que una raíz cuadrada de un número positivo es un valor negativo, y otra, un valor positivo. Así, las raíces cuadradas de 4 son -2 y $+2$ (lo cual puede escribirse $\sqrt{4} = \pm 2$) y las raíces cuadradas de 100, $+10$ y -10 (o sea, $\sqrt{100} = \pm 10$). El no observar esta regla puede dar lugar a la siguiente contradicción [4]:

(a) $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$
(b) $(n + 1)^2 - (2n + 1) = n^2$
(c) Restando: $n(2n + 1)$ de ambos miembros y sacando factor común, tenemos:
(d) $(n + 1)^2 - (n + 1)(2n + 1) = n^2 - n(2n + 1)$
(e) Sumando: $\frac{1}{4}(2n + 1)^2$ a ambos miembros de (d) se obtiene: $(n + 1)^2 - (n + 1)(2n + 1) + \frac{1}{4}(2n + 1)^2 =$

$$= n^2 - n(2n + 1) + \frac{1}{4}(2n + 1)^2,$$

que puede escribirse así:

(f) $[(n + 1) - \frac{1}{2}(2n + 1)]^2 = [n - \frac{1}{2}(2n + 1)]^2.$

Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros:

(g) $n + 1 - \frac{1}{2}(2n + 1) = n - \frac{1}{2}(2n + 1)$

y, por lo tanto:

(h) $n = n + 1.$

III. El lector podrá desenredar por su cuenta el siguiente sofisma aritmético [5]:

(1) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ ....verdadero
(2) $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \times (-1)}$ ....verdadero
(3) Por lo tanto: $(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{1}$; es decir, $-1 = 1$ ....?

IV. Una paradoja que no puede resolverse con el empleo de matemáticas elementales es la siguiente: Supongamos que $\log(-1) = x$; en consecuencia, por la ley de los logaritmos:

$$\log(-1)^2 = 2 \times \log(-1) = 2x.$$

Pero, por otra parte, $\log(-1)^2 = \log(1)$ que es igual a 0. En consecuencia, $2 \cdot x = 0$ y, $\log(-1) = 0$, que evidentemente no es cierto. La explicación reside en el hecho de que la función que representa el logaritmo de un número negativo, o complejo, no tiene un *solo valor*, sino *muchos valores*. Es decir, si fuésemos a construir la habitual tabla funcional para los logaritmos de los números negativos y de los complejos habría una *infinidad* de valores correspondientes a cada número [6].

V. El infinito, en matemáticas, es siempre indómito, a menos que se le trate correctamente. Ya vimos ejemplos de esto al desarrollar la teoría de los conjuntos y veremos más todavía cuando tratemos las paradojas lógicas. Consideramos oportuno citar a continuación un nuevo ejemplo al respecto.

Así como la aritmética transfinita tiene sus reglas propias que difieren de las de la aritmética finita, se requieren reglas especiales para operar con *series infinitas*. Si se las ignora o no se las observa, se originan contradicciones. Por ejemplo, consideremos la serie equivalente al logaritmo natural de 2:

$$\text{Log } 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \dots$$

Si cambiamos el orden de los términos, como en la aritmética finita, obtenemos:

$$\text{Log } 2 = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \dots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \dots\right)$$

De este modo:

$$\text{Log } 2 = \left\{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \dots\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right)\right\} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \dots\right) =$$
$$= \left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots\right\} -$$
$$- \left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots\right\} = 0.$$

Por lo tanto: log 2 = 0.
Por otra parte:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \dots = 0{,}69315,$$

según puede obtenerse de cualquier tabla de logaritmos.

Alterando el orden de los términos de una manera ligeramente distinta:

$$\log 2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \dots =$$

$$= \frac{3}{2} \times 0{,}69315 \text{ ó, en otras palabras,}$$

$$\log 2 = \frac{3}{2} \times \log 2.$$

Una serie famosa, que preocupó a Leibniz, es la aparentemente sencilla: +1 − 1 + 1 − 1 + 1... Al ordenar en distinta forma sus términos, se obtiene una variedad de resultados; por ejemplo: (1 − 1) + (1 − 1) + (1 − 1) + ... = 0, pero: 1 − − (1 − 1) + (1 − 1)... = 1.

SOFISMAS GEOMÉTRICOS

Las ilusiones ópticas referentes a figuras geométricas explican muchos engaños y confusiones. Nos limitaremos a considerar sofismas no causados por limitaciones de nuestra fisiología[7], sino de errores en el raciocinio matemático. Una "demostración" geométrica muy conocida es la de que todo triángulo es isósceles. Supone que la bisectriz de un ángulo del triángulo y la recta mediatriz del lado opuesto a dicho ángulo, se cortan en un punto interior del triángulo.

La siguiente es también una demostración falsa que expresa que un ángulo recto es igual a un ángulo mayor que un recto[8].

En la figura 69, *ABCD* es un rectángulo. Si *H* es el punto medio de *CB*, trácese por *H* una recta perpendicular a *CB*, la cual cortará a *DA* en *J* y será perpendicular a ella. Desde *A* trácese la recta *AE* exterior al rectángulo e igual a *AB* y *CD*. Únase *C* con *E* y sea *K* el punto medio de esta recta. Por *K* trácese una perpendicular a *CE*. Como *CB* y *CE* no son paralelas, las rectas que pasan por *H* y *K* se cortarán en un punto *O*. Únase *OA*, *OE*, *OB*, *OD* y *OC*. Se verá claramente

que los triángulos *ODC* y *OAE* son iguales en todo. Ya que *KO* es la perpendicular que divide a *CE* en dos partes iguales, todo punto perteneciente a *KO* equidista de *C* y de *E*, *OC* es igual a *OE*. Análogamente *HO* es la recta perpendicular en el punto medio de *CB* y *DA*, *OD es igual* a *OA*.

Como *AE* es por construcción igual a *DC*, los tres lados del triángulo *ODC* son iguales, respectivamente, a los tres lados de triángulo *OAE*. En consecuencia, los dos triángulos son iguales y, por lo tanto, el ángulo *ODC* es igual al ángulo *OAE*. Pero el ángulo *ODA* es igual al ángulo *OAD*, porque el lado *AO* es igual a *OD* en el triángulo *OAD* y los ángulos

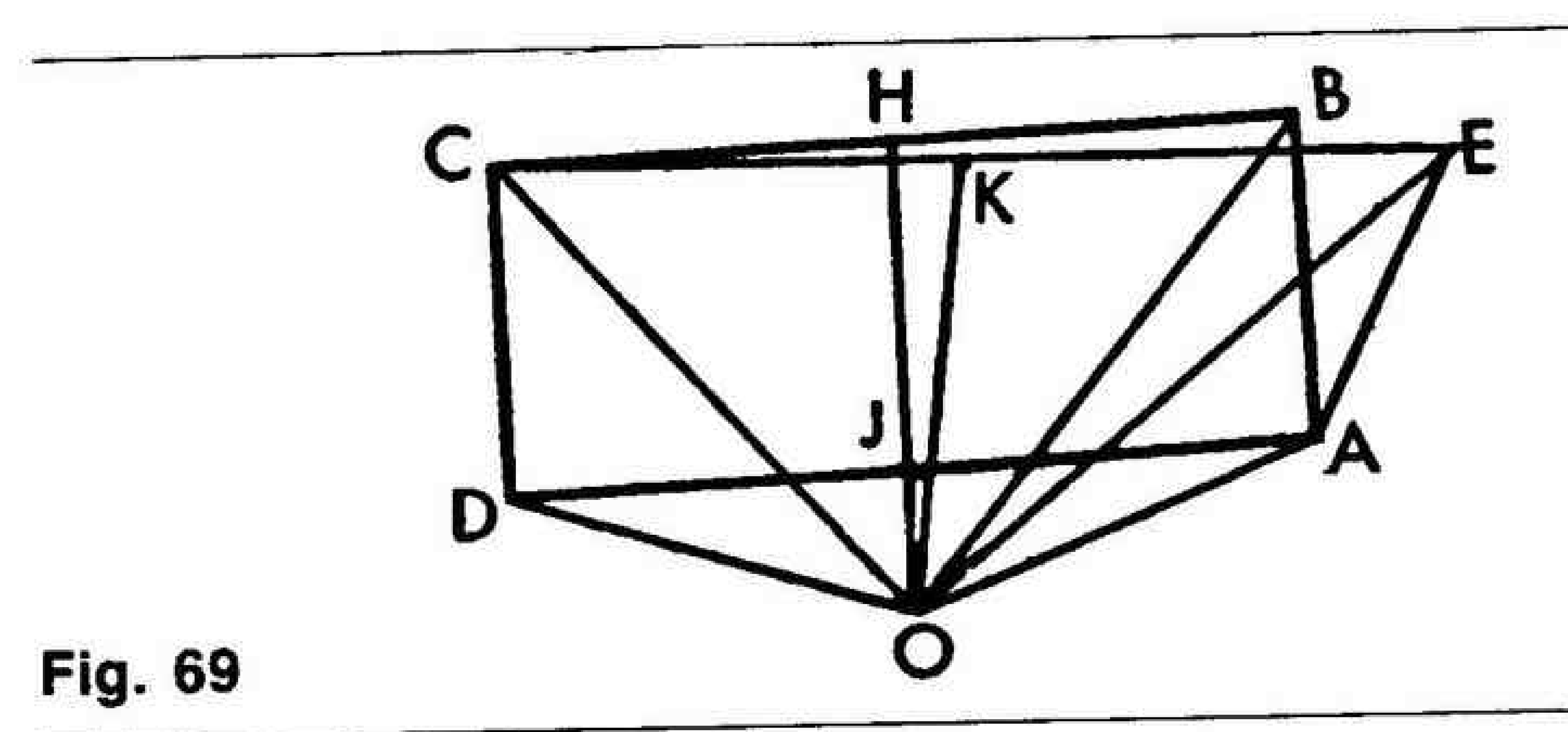


Fig. 69

adyacentes a la base en el triángulo isósceles son iguales. En consecuencia, el ángulo *JDC*, que es igual a la diferencia de *ODC* y *ODJ*, es igual a *JAE* que es la diferencia entre *OAE* y *OAJ*. Pero el ángulo *JDC* es recto mientras que el ángulo *JAE* es mayor que un ángulo recto y, por lo tanto, el resultado es contradictorio. ¿Puede usted encontrar el fallo? Le sugerimos dibujar la figura exactamente.

PARADOJAS LÓGICAS

Como los cuentos populares y las leyendas, las paradojas lógicas tuvieron sus precursores en tiempos remotos. Habiéndose ocupado de la filosofía y los fundamentos de la lógica, los griegos formularon algunos de los acertijos lógicos que, en épocas recientes, han vuelto a ser plaga de matemáticos y filósofos. Los sofistas crearon una verdadera especialidad en el arte de proponer preguntas o problemas difíciles, con los que dejaban perplejos y confundían a sus oponentes en los debates, aunque la mayor parte de ellos se basaban en pensamientos torpes y vicios dialécticos.

Aristóteles los destruyó al establecer los fundamentos de la lógica clásica, una ciencia que ha visto envejecer y que ha sobrevivido a todos los sistemas filosóficos de la antigüedad y que en casi todas sus partes es aún hoy perfectamente válida.

Pero hubo acertijos difíciles que resistieron porfiadamente todo intento de aclaración[9]. La mayor parte de ellos se origina en lo que se ha dado en llamar "la falacia de petición de principio" que es "debida al hecho de descuidar el principio fundamental de que lo que involucra al todo, en una totalidad dada, no puede, en sí mismo, ser parte de la totalidad"[10]. Ejemplos sencillos de esto son aquellas frases pontificales, familiares a todo el mundo, que parecen tener muchísimo significado, pero que, en realidad no tienen ninguno, tales como: "nunca digas nunca", o "toda regla tiene excepciones" o "toda generalidad es falsa". Consideraremos algunas de las paradojas lógicas más desarrolladas, que implican el mismo sofisma básico y luego discutiremos su importancia desde el punto de vista matemático.

(A) Cazar en el vedado de un poderoso príncipe se castigaba con la muerte, pero el príncipe decidió posteriormente que aquel que fuera sorprendido cometiendo ese delito tendría el privilegio de elegir entre ser ahorcado o decapitado. Se permitía que el delincuente formulara una proposición — si era falsa, se le ahorcaba; si era verdadera, se le decapitaba. Un bribón, ducho en lógica, se valió de esa dudosa prerro-

gativa —ser ahorcado si no acertaba y ser decapitado si lo hacía— diciendo: "Seré ahorcado." Aquí se presentó un dilema imprevisto, puesto que el reo agregó: "Si ustedes me ahorcan ahora, infringen las leyes hechas por el príncipe, puesto que mi proposición es verdadera y debería, por lo tanto, ser decapitado; pero si ustedes me decapitan, también violan las leyes, porque entonces lo que yo dije era falso y debía, en consecuencia, ser ahorcado." Como en el relato de Frank Stockton, de la dama y el tigre, el final se lo dejamos a usted. Sin embargo, el delincuente probablemente no sufrió peor suerte en manos del verdugo que la que habría padecido en manos de un filósofo, porque hasta este siglo, los filósofos tuvieron poco tiempo para ocuparse en esas triviales adivinanzas —especialmente de aquellas que no podían resolver*.

(B) El barbero de la aldea afeita a todos los hombres de la misma que no se afeitan a sí mismos. Pero este principio pronto lo complica en una situación dialéctica análoga a la del verdugo. ¿Se afeitará a sí mismo? Si lo hace, afeita a alguien que se afeita a sí mismo y quiebra su propia regla. Si no lo hace, además de quedar con barba, también quiebra su regla al no afeitar a una persona de la aldea que no se afeita a sí misma.

(C) Fijémonos en que cada número entero puede expresarse, en idioma inglés, sin usar cifras. Así, (a) 1400 puede escribirse: "one thousand, four hundred" o (b) 1769823, como, "one million, seven hundred and sixty-nine thousand, eight hundred and twenty-three". Es evidente que ciertos números requieren más sílabas que otros; en general, cuanto mayor es un número, tantas más sílabas se necesitan para expresarlo. Así (a) requiere 6 sílabas, y (b) 21. Ahora bien, puede establecerse que ciertos números requerirán 19 sílabas o

* Véase en el Quijote, capítulo LI, la paradoja del puente.

menos, mientras que otros necesitarán más de 19. Además no es difícil demostrar que entre aquellos números enteros que requieren exactamente 19 sílabas para ser nombrados en idioma inglés, debe haber uno que sea el más pequeño. Bien, "es fácil ver"[11] que *"the least integer not nameable in fewer than nineteen syllables"* es una frase que debe denotar al número específico, 111777. Pero la expresión en cursiva que antecede es, en sí misma, un medio inequívoco de denotar al número entero más pequeño que se puede expresar en diecinueve sílabas en idioma inglés. Sin embargo, ¡la frase de referencia (en inglés) tiene sólo dieciocho sílabas! De este modo caemos en una contradicción, pues el menor número entero expresable en diecinueve sílabas puede expresarse con dieciocho sílabas*.

(D) La forma más sencilla de paradoja lógica que surge a raíz del uso indistinto de la palabra *todo*, puede verse en la figura 70.

¿Qué debe decirse de la proposición número 3? Las proposiciones 1 y 2 son falsas, pero la 3 puede ser tanto un lobo vestido de oveja como una oveja vestida de lobo. No es ni lo uno ni lo otro: Ni falsa ni verdadera.

Una forma más fina aparece en la famosa paradoja de Russell acerca de la clase de todas las clases que no son

* A continuación damos un ejemplo equivalente en español:

(C) Consideremos el caso de que cada número entero se puede expresar, en español, sin el uso de símbolos. Así, (a) 1.400 se puede escribir: mil cuatrocientos, o (b) 1.779.823, como un millón setecientos setenta y nueve mil ochocientos veintitrés. Es evidente que ciertos números requieren más sílabas que otros; en general, cuanto mayor es un número, tantas más sílabas se necesitan para expresarlo. Así, (a) requiere de 5 sílabas, y (b) 21. Ahora bien, puede establecerse que ciertos números requerirían de 21 sílabas o menos, mientras que otros necesitarán más de 21. Además no es difícil demostrar que entre aquellos números enteros que requieren exactamente de 21 sílabas para ser nombrados en español, debe haber uno que sea el más pequeño. Bien, "es fácil ver" que *"el menor entero que se expresa con veintiún sílabas"*, es una frase que debe denotar al número específico 444.441. Pero la expresión en cursiva que antecede es, en sí misma, un medio inequívoco de denotar al número entero más pequeño que se puede expresar en veintiún sílabas en español. Sin embargo, la frase de referencia tiene sólo ¡dieciocho sílabas! Lo cual es una contradicción, pues el menor entero que expresamos en veintiún sílabas se puede expresar con dieciocho sílabas. *(N. del R.)*

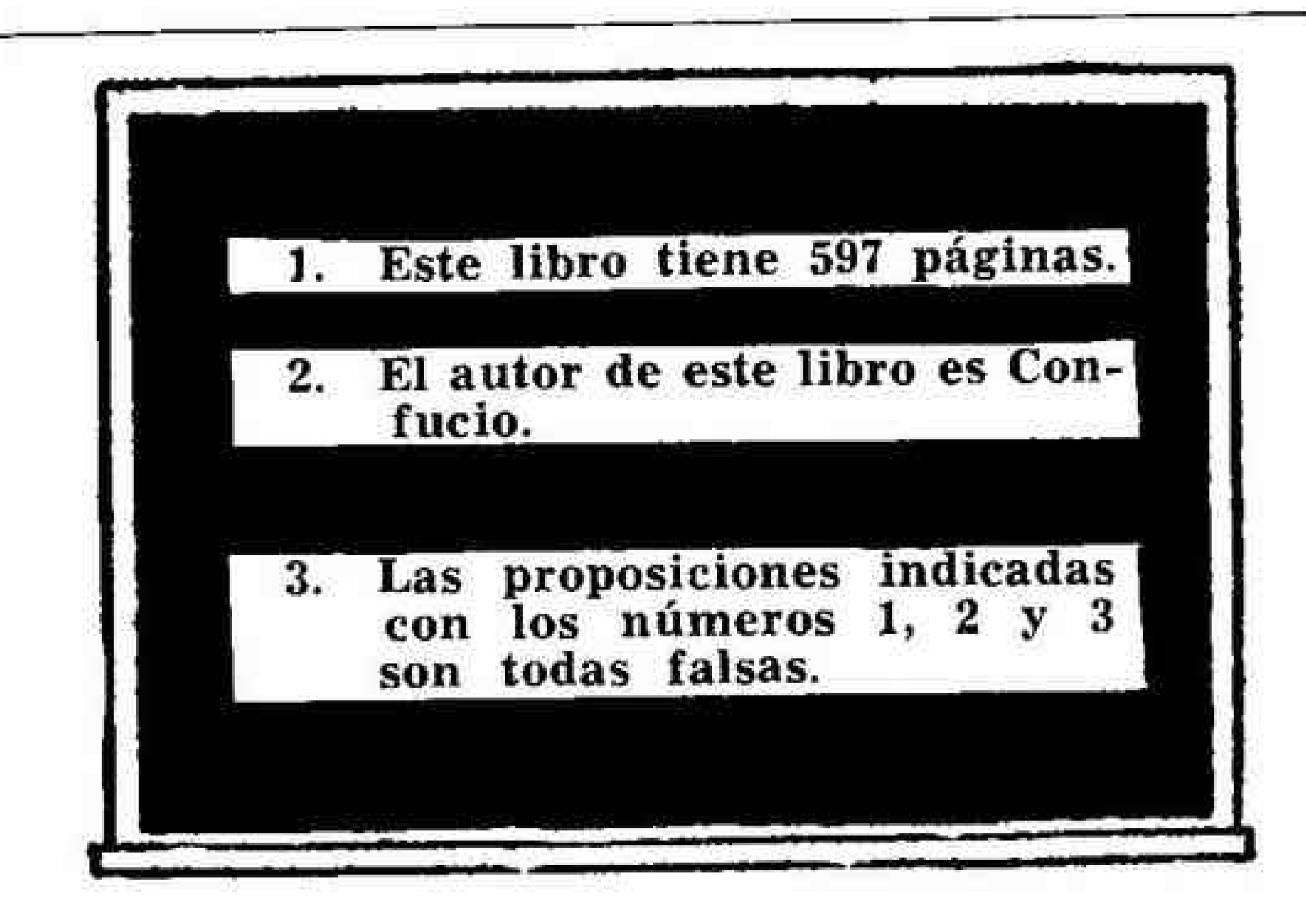


Fig. 70

miembros de sí mismas. Su argumento es algo escurridizo, pero recompensará la cuidadosa atención que se le preste:

(E) Usando la palabra clase en su acepción ordinaria podemos decir que hay clases formadas por mesas, libros, personas, números, funciones, ideas, etc. Por ejemplo, la clase de todos los presidentes de Estados Unidos tiene por miembros a todas las personas, vivas o difuntas, que hayan sido presidentes de Estados Unidos. Todo lo demás en el mundo, exceptuando la persona que haya sido o sea presidente de Estados Unidos, incluyendo el *concepto* de la clase misma, *no* es un miembro de esta clase. Luego éste es un ejemplo de una clase que *no* es parte (miembro) de sí misma. Asimismo, la clase de todos los miembros de la Gestapo, o sea la policía secreta* la cual contenía a algunos, ya que no a todos, de los truhanes que había en Alemania; o bien la clase de todas las figuras geométricas en un plano acotado por líneas rectas; o la clase de todos los números enteros desde 1 hasta 4.000 inclusive, tienen por miembros las cosas descritas, pero las clases no son miembros de sí mismas.

* Se refiere a la época de la Alemania nazi. *(N. del R.)*

Ahora bien, si consideramos una clase como un *concepto*, la *clase de todos los conceptos* en el mundo es, en sí misma, un concepto y, de este modo, constituye una clase que es miembro de sí misma. Nuevamente, la clase de todas las ideas presentadas a la atención del lector de este libro es una clase que se contiene a sí misma como miembro, ya que al mencionar esta clase es una idea que traemos a la atención del lector. Teniendo presente esta distinción, podemos dividir a todas las clases en dos tipos: Aquellas que son parte de sí mismas y aquellas que *no* lo son. En realidad, podemos formar una clase compuesta de *todas aquellas clases que no* forman parte (miembros) de sí mismas (nótese el peligroso empleo de la palabra "todas"). La cuestión se presenta así: ¿Es esta clase (compuesta de aquellas clases que no son elemento de sí mismas) un miembro de sí misma o no? Tanto una contestación afirmativa como negativa nos enreda en una contradicción sin salida. Si la clase en cuestión *es* miembro de sí misma, no debería serlo por definición, pues sólo debería contener a aquellas clases que no son miembros de sí mismas. Pero si *no* es miembro de sí misma, debería serlo por la misma razón.

No nos cansaremos de insistir que las paradojas lógicas no son ardides inútiles o tontos. No fueron incluidos en este volumen para hacer reír al lector, aunque sólo fuese ante las limitaciones de la lógica. Las paradojas son como las fábulas de La Fontaine, que fueron ataviadas para asemejarse a cuentos inocentes sobre la zorra y las uvas, los guijarros y las ranas. Pues, al igual todos los conceptos éticos y morales fueron hábilmente bordados en su trama, del mismo modo, todo lo que hay de pensamiento lógico y matemático, filosófico y especulativo, está entretejido en estas pequeñas bromas.

Las matemáticas modernas al tratar de evitar las paradojas de la teoría de los conjuntos, se vieron enfrentadas a la

alternativa de adoptar un escepticismo aniquilador con respecto a todo el razonamiento matemático, o de reconsiderar y reconstruir tanto los fundamentos de las matemáticas como los de la lógica. Debería ser claro que si las paradojas pueden surgir de un razonamiento aparentemente legítimo sobre la teoría de los conjuntos también pueden surgir en *cualquier otra parte* de las matemáticas. De este modo, aun si las matemáticas pudiesen reducirse a la lógica, como esperaban Frege y Russell, ¿a qué propósito servirían si la lógica misma era insegura? Al proponer su "Teoría de tipos" Whitehead y Russell, en *Principia Mathematica*, lograron evitar las contradicciones por medio de un recurso formal. Las proposiciones que eran *gramaticalmente* correctas, pero contradictorias, fueron declaradas desprovistas de sentido. Además, se formuló un principio que establece específicamente qué forma debe tomar una proposición para tener sentido; pero esto sólo resolvió a medias las dificultades, pues aunque las contradicciones podían ser reconocidas, los argumentos que conducían a las contradicciones no podían ser invalidados sin afectar ciertas partes aceptadas de las matemáticas. Para superar esta dificultad, Whitehead y Russell postularon el *axioma de reducibilidad*, que no tratamos aquí por ser demasiado técnico. Pero queda en pie el hecho de que dicho axioma no es aceptable para la gran mayoría de los matemáticos y que las paradojas lógicas, después de haber dividido a los matemáticos en bandos inalterablemente opuestos, quedan aún por resolver[12].

Se ha insistido en que el matemático se esfuerza siempre por poner sus teoremas en la forma más general posible. A este respecto los fines perseguidos por el matemático y el lógico son idénticos —formular proposiciones y teoremas de la forma: si A es cierto, entonces B es cierto, donde A y B abarcan mucho más que coles y reyes. Pero si ésta constituye una elevada finalidad, es también peligrosa, lo mismo que el concepto de infinito. Cuando el matemático dice que tal y cual proposición aplicada a una cosa es cierta, esa proposición puede ser interesante e indudablemente es segura. Pero cuando trata de extender su proposición a *todo*, aunque es mucho más interesante, es también mucho más peligroso. En la transición de *uno* a *todo*, de lo particular a lo general, las matemáticas han realizado su mayor progreso y sufrido sus más serios reveses, entre los cuales, las paradojas lógicas forman la parte más importante. Porque si las matemáticas desean progresar sin riesgos y confiadamente, deben primero poner en orden sus asuntos en su propia casa.

NOTAS DE ESTE CAPÍTULO

1. Hablando rigurosamente, las proposiciones matemáticas no son ni verdaderas ni falsas: provienen simplemente de los axiomas y postulados que damos por sentados. Si aceptamos estas premisas y empleamos argumentos legítimamente lógicos, obtenemos proposiciones legítimas. Los postulados no se caracterizan por ser verdaderos o falsos; simplemente convenimos en atenernos a ellos. Pero hemos empleado la palabra *verdadero* sin ninguna de sus implicaciones filosóficas para referirnos de una manera no ambigua a proposiciones lógicamente deducidas de axiomas comúnmente aceptadas, página 200.
2. Dos conjuntos de puntos (configuraciones) se dicen congruentes si, a cada par de puntos P, Q de un conjunto, corresponde unívocamente un par de puntos P', Q' del otro conjunto, tal que la distancia entre P' y Q' sea igual a la distancia entre P y Q, página 208.
3. En la versión que hemos dado en este capítulo de los teoremas de Hausdorff, Banach y Tarski hemos hecho amplio uso de la brillante explicación dada por Karl Menger en su disertación: "¡Tiene solución la cuadratura del círculo!" que aparece en *Alte Probleme Neue Lösungen*, Viena: Deuticke, 1934, página 213.

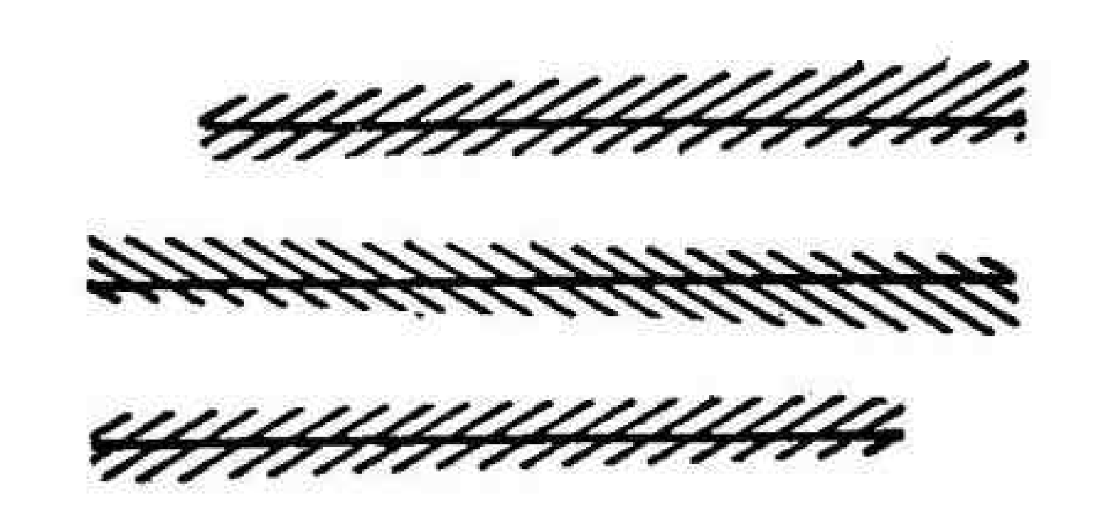


Fig. 71. ¿Son paralelas las tres rectas horizontales?

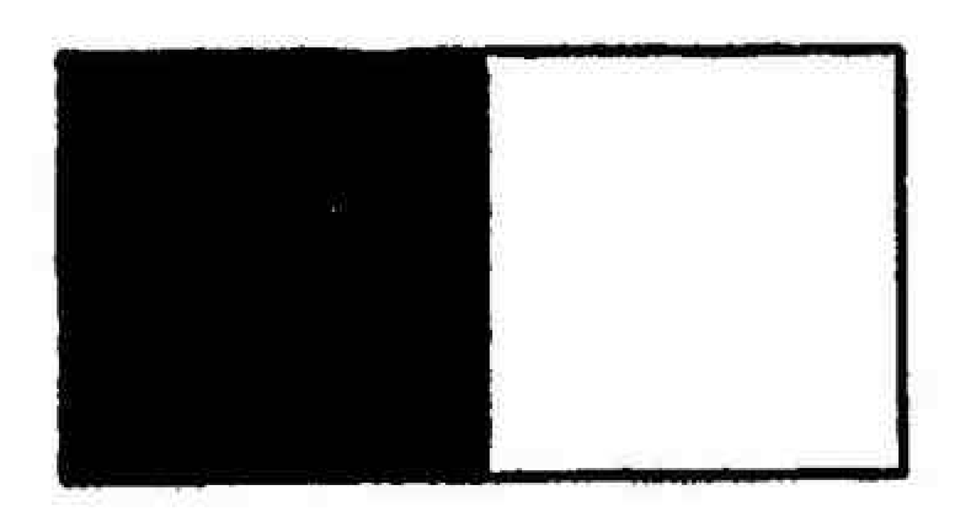


Fig. 72. Por supuesto que el cuadrado blanco es más grande que el negro. ¿O será más pequeño?

4. Lietzmann, *Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen*, Breslau. Ferd. Hirt., 1930, página 216.
5. Ball, *op. cit.*, página 217.
6. Weismann, *Einführung in das mathematische Denken*, Viena, 1937, página 217.
7. Las siguientes ilusiones ópticas, aunque no corresponden en realidad a un libro sobre matemáticas pueden ser de algún interés, al menos para la imaginación, página 219.
8. Ball, *op. cit*, página 219.

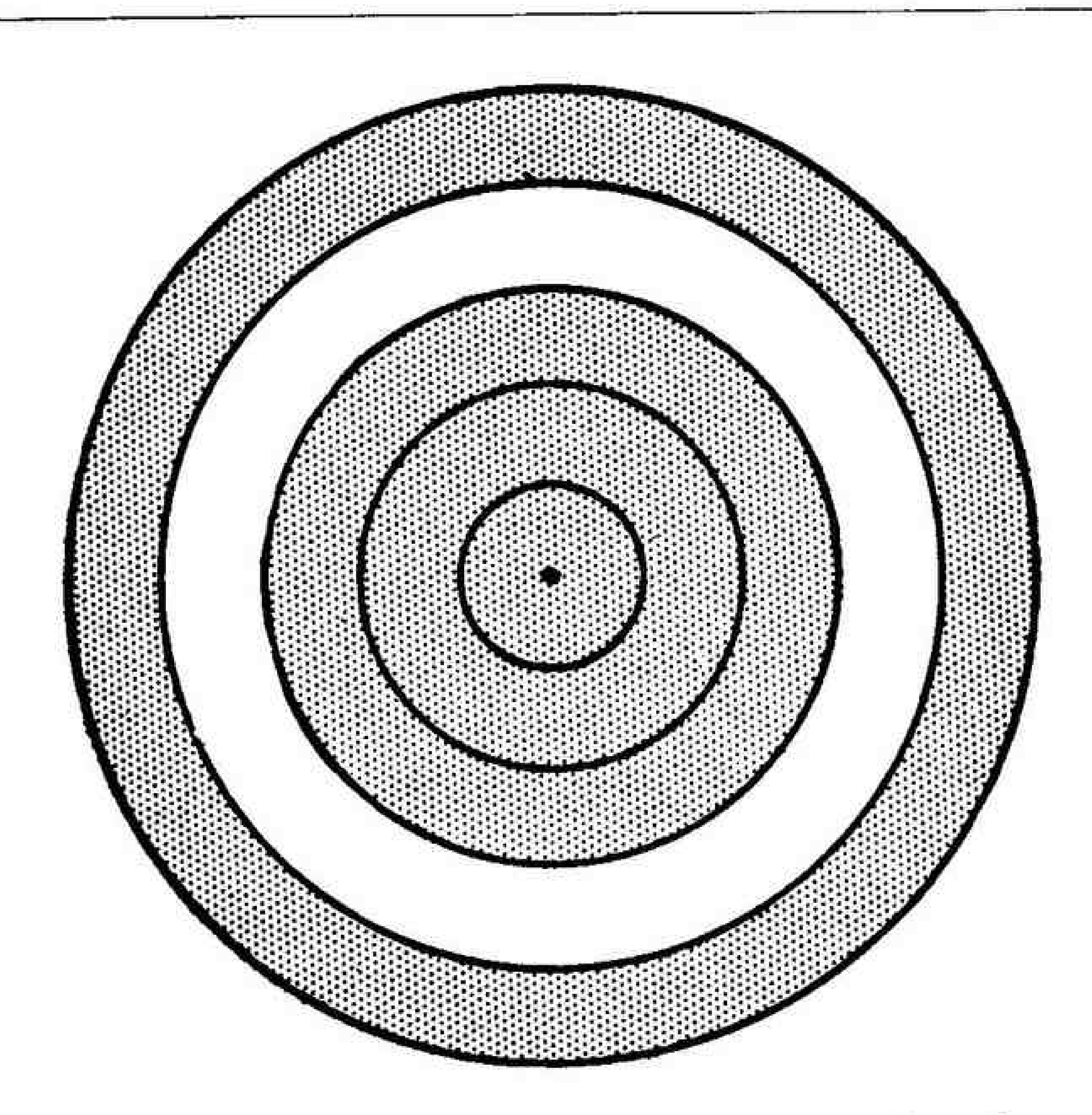


Fig. 73. Las dos regiones sombreadas tienen la misma área.

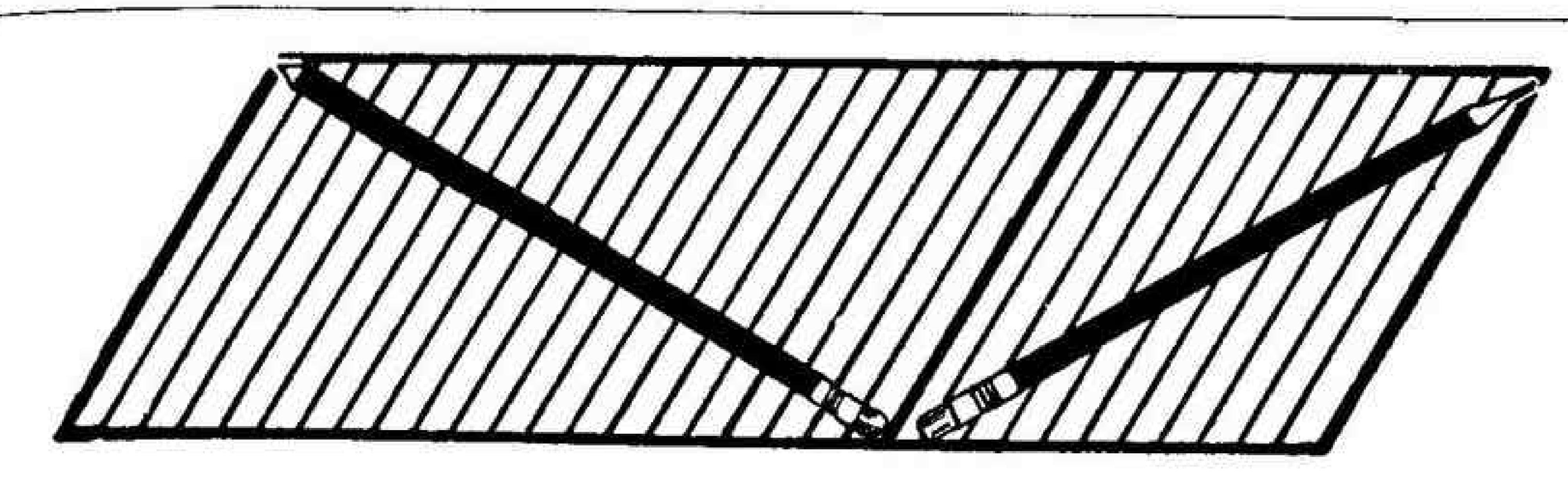


Fig. 74. ¿Cuál de los dos lápices es más largo? Mídalos y lo determinará.

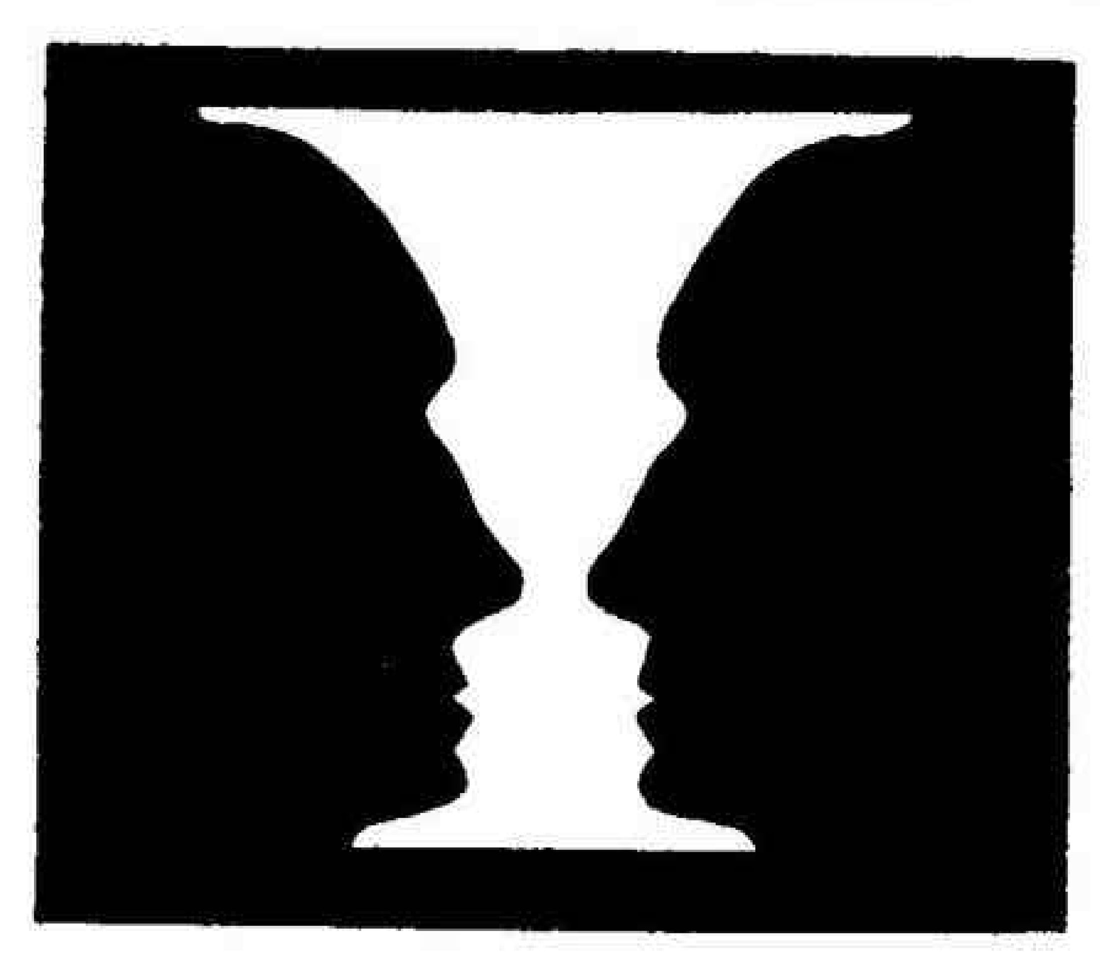


Fig. 75. ¿Qué ve usted? Ahora mire otra vez.

9. Por ejemplo, la paradoja de Epiménides referente a los cretenses que dice que todos los nativos de la isla de Creta son mentirosos. (V. cap. II.) Página 221.
10. Ramsay, Frank Plumpton. Artículos sobre "Matemáticas" y "Lógica". *Encyclopedia Britannica*, 13.ª edición, página 221.
11. Esta expresión puede, quizá, ser tomada en el sentido con que Laplace la empleó. Cuando escribió su monumental *Mécanique Céleste* hizo abundante uso de la expresión "Es fácil ver" antepuesta siempre a alguna fórmula matemática a la que había llegado sólo después de meses de labor. El resultado fue que todos los hombres de ciencia que leían su obra, casi invariablemente reconocían en esta expresión una peligrosa señal de que allí había algo muy difícil para seguir adelante, página 223.
12. Como ya se señaló en el capítulo sobre el gúgol, hay adeptos a Russell que están satisfechos con la teoría de los tipos y el axioma de reducibilidad; hay intuicionistas, precedidos por Brouwer y Weyl, que rechazan el axioma citado y cuyo escepticismo sobre el infinito en las matemáticas los ha llevado hasta el punto de descartar muchas partes de las matemáticas modernas como sin sentidos, por estar imbricadas con el infinito; y hay formalistas, encabezados por Hilbert, quienes, si bien se oponen a las creencias de los intuicionistas, difieren considerablemente de Rusell y la secuela logística. Hilbert considera a las matemáticas como un juego de reglas arbitrarias, comparable al ajedrez, y ha creado una concepción de matemáticas cuyo programa consiste en la discusión de este juego sin sentido y sus axiomas, página 226.

VII. AZAR Y PROBABILIDAD

Había una vez un mandril inteligente, que solía tocar el fagot, puesto que decía: "Me parece que dentro de billones de años, lograré, ciertamente, dar con el tono."

SIR ARTHUR EDDINGTON

Holmes había estado sentado, durante algunas horas, en silencio, con su larga y estrecha espalda encorvada sobre una vasija química en la cual estaba mezclando un producto particularmente maloliente. Tenía la cabeza hundida sobre el pecho y visto desde donde yo lo contemplaba, parecía un pájaro extraño y descarnado, con plumaje gris oscuro y un copete negro.

"¿De manera, Watson", dijo de pronto, "que no se propone usted invertir su dinero en acciones de minas de África del Sur?".

Di un salto de asombro. Aún acostumbrado como estaba a las curiosas facultades de Holmes, esta repentina intrusión en mis pensamientos más íntimos era completamente inexplicable.

"¿Cómo es posible que sepa usted eso?", le pregunté.

Hizo girar su sillón, sosteniendo en una mano un tubo de ensayo que emitía espesos vapores y, con un destello de ale-

gría en sus ojos hundidos, se dirigió a mí en los siguientes términos:

"Ahora, Watson, confiese que ha quedado asombrado.

"Efectivamente.

"Debería hacerle firmar un papel en ese sentido.

"¿Por qué?

"Porque dentro de cinco minutos usted dirá que todo esto es absurdamente sencillo.

"Estoy seguro de que no diré nada parecido."

"Mire, mi querido Watson", dijo dejando su tubo de ensayo en el portatubos y comenzando a disertar con el aire de un profesor que se dirige a su clase: "No es en realidad difícil escalonar una serie de deducciones, cada una de las cuales depende de la que la precede y, que en sí misma, es sencilla. Si, después de proceder así, uno enlaza todas las deducciones centrales y presenta al auditorio el punto de partida y la conclusión, puede llegar a provocar alarma o, posiblemente, un efecto de mal gusto. Ahora bien, no era realmente difícil, pues me bastó observar el surco comprendido entre el índice y el pulgar de su mano izquierda para estar seguro de que usted *no* se propone invertir su pequeño capital en los campos auríferos."

"No veo relación alguna."

"Probablemente no, pero puedo demostrarle rápidamente que existe una relación muy estrecha. He aquí los eslabones perdidos del muy sencillo encadenamiento:

1. Usted tenía tiza entre el dedo índice y el pulgar de la mano izquierda cuando regresó del club anoche.
2. Usted se pone tiza allí cuando juega al billar a fin de asentar el taco.
3. Usted nunca juega al billar excepto con Thurston.
4. Usted me dijo, hace 4 semanas, que Thurston tenía un plazo para decidirse en alguna concesión sudafricana, que expiraría al cabo de un mes y en la que tenía deseos de hacerlo participar a usted.
5. Su libreta de cheques está dentro del cajón de mi escritorio y usted no me ha pedido la llave.
6. En consecuencia, usted no se propone invertir su dinero de ese modo."

"¡Pero eso es absurdamente sencillo!", dije.

"Completamente", me contestó un poco irritado. "Todo problema resulta infantil una vez que se lo han explicado..." [1]

Este extracto, tomado de las aventuras de Mr. Sherlock Holmes, distinguido detective privado, es una excelente caricatura del *razonamiento por inferencia probable*. Tal método de razonamiento, aunque se parece al proceso formal del silogismo, tiene articulaciones más libres y está menos aprisionado en un sistema. Por consiguiente, se adapta mejor al pensamiento cotidiano.

Razonamientos del siguiente tipo*:

A.
Ningún fósil puede reproducirse.
Una ostra puede reproducirse.
Luego, las ostras no son fósiles.

B.
Ningún pato baila el vals.
Ningún oficial se niega a bailar el vals.
Todas mis aves de corral son patos.
Por lo tanto, mis aves no son oficiales.

tienen gran poder de convicción. Son claros, exactos y precisos y aseguran para nuestros pensamientos el máximo de validez formal. Al igual que en las matemáticas, se formulan

---

* Cohen y Nagel, *op. cit.*

ciertas suposiciones fundamentales y de ellas se deducen conclusiones. Pero la mayor parte de nuestros pensamientos no son matemáticos, la mayoría de nuestras creencias no son seguras, sino solamente probables. Como escribió Locke en una ocasión: "En la mayor parte de nuestra ansiedad, Dios nos ha deparado solamente el crepúsculo, como lo llamaría, de la Probabilidad, adaptable, presumo, a ese estado de Mediocridad y Noviciado en el que le plugo colocarnos aquí."

Es, pues, la relación de probabilidad y no la de certidumbre la que prevalece en la mayoría de nuestras premisas y conclusiones. Estamos *seguros* que una moneda caerá después de arrojarla al aire. Estamos igualmente seguros de que no puede retirarse una bolilla negra de una urna que sólo contiene bolillas blancas. Pero la mayoría de nuestras creencias son deficientes en certidumbre, aunque puedan fluctuar desde muy inseguras hasta muy firmes. De este modo, estamos casi seguros que una moneda no caerá "cara" 100 veces seguidas. O podemos creer, sin mayor fundamento, que ganaremos el gran premio en las próximas carreras hípicas.

Quizá sea posible explicar esta actitud. Algunas cosas en el mundo suceden de conformidad con leyes naturales, las cuales (a menos que creamos en milagros) se cumplen inexorablemente. Así, debido a la fuerza de la gravedad, las monedas, al ser arrojadas en el aire, caerán. El Sol saldrá mañana porque los planetas siguen cursos regulares. Todos los hombres son mortales porque la muerte es una necesidad biológica —y así sucesivamente.

Pero acerca de la mayoría de los fenómenos que nos rodean sabemos muy poco. No conocemos ni las leyes a que obedecen, ni si en realidad obedecen a ley alguna. Los dados a hacer ver moralejas sobre las limitaciones humanas, no tendrían que ir más allá de algunos casos triviales para encontrar confirmaciones alarmantes. Podemos predecir los movimientos de planetas alejados a millones de kilómetros

en el espacio, pero nadie puede pronosticar el resultado de arrojar una moneda o de tirar un par de dados. Acontecimientos de esta categoría y otros innumerables, los atribuimos a la casualidad. Pero la casualidad es simplemente un eufemismo para la ignorancia. Decir que un acontecimiento está determinado por la casualidad equivale a decir que no sabemos cómo está determinado. No obstante ello, aun dentro del dominio del azar, tenemos la sensación de cierta regularidad, de una cierta simetría —un orden dentro del desorden— y así, aun en torno a acontecimientos que atribuimos a la casualidad, formamos varios grados de creencia racional. La teoría de la probabilidad considera lo que paradójicamente se denomina "las leyes del azar". Parte de su análisis crítico es una tentativa para formular reglas sobre *cuándo* y *cómo* pueden emplearse las matemáticas para medir la relación de probabilidad. Sin embargo, debemos aclarar el significado intrínseco de la probabilidad antes de que sea posible entrar a considerar sus reglas.

Aunque la mayor parte de nuestros juicios se basan más sobre la probabilidad de que sobre la certidumbre, rara vez se piensa cuidadosamente en la mecánica de este método de razonamiento. En el laboratorio, en los negocios, como jurados, o en la mesa de bridge, los juicios se forman por inferencia probable. Pocos tienen las facultades de un Sherlock Holmes o pueden presumir de tan afortunadas deducciones. Y sin embargo, en casi todo nuestro pensamiento cotidiano, nos vemos obligados a desempeñar el papel de detectives aficionados, lógicos y matemáticos.

Cuando está nublado y hace calor, decimos: *"Probablemente lloverá."* El meteorólogo puede exigir mejores pruebas antes de aventurarse a formular una predicción. Necesitará conocer la presión barométrica, las isóbaras y las tablas de

precipitación pluvial. Pero el hombre de la calle hace su predicción con mucho menos. El dinero ganado rápidamente y en forma abundante y misteriosa durante la vigencia de la ley seca era *probablemente* el fruto del contrabando de licores. El hombre que recibe unos pocos golpes con el pie debajo de la mesa de bridge deduce que *probablemente* está jugando mal, ya sea un hombre de negocios o de ciencia.

Y así razonamos sobre cuestiones que van de lo más trivial a lo más importante haciendo frecuente empleo de palabras y expresiones tales como: "probable", "la probabilidad es" o "los riesgos son", sin tener, no obstante, una idea precisa de lo que significa probabilidad. Y sin embargo, no es precisamente por falta de definiciones. En verdad que los hombres de ciencia prácticos han dejado, por lo común, la tarea de definir e interpretar la probabilidad a los filósofos, atentos quizás al aforismo galo que expresa que la ciencia está continuamente haciendo progresos porque nunca tiene certeza en sus resultados. Pero mientras los hombres de ciencia han quedado satisfechos con extender los usos de la probabilidad matemática y perfeccionar sus métodos, los filósofos y los matemáticos han intentado definirla.

Sobre la base de muchas opiniones y teorías contradictorias, han cristalizado tres interpretaciones principales.

El punto de vista subjetivo de la probabilidad, aunque ahora algo pasada de moda, en una época (especialmente en el siglo pasado) tuvo una posición muy respetable. Uno de sus principales defensores y comentadores fue Augustus de Morgan, el célebre lógico y matemático. Pensaba que la probabilidad se refería a un *estado de la mente*, al *grado* de certidumbre o de incertidumbre que caracteriza nuestras opiniones. Este punto de vista no es del todo erróneo; las principales dificultades que ocasiona surgen cuando intentamos justificar, sobre dichas bases, un cálculo de probabilidad.

Una proposición es verdadera o falsa[2], pero nuestro conocimiento es, para la mayor parte de las proposiciones, tan limitado que no podemos estar racionalmente seguros de su verdad o falsedad. Para formarnos una *creencia* racional debemos tener algún conocimiento sobre el particular. A veces dicho conocimiento puede ser suficiente para justificar nuestra certidumbre de que la proposición es verdadera o falsa. Así, por ejemplo, estamos seguros de que Sócrates no era ciudadano norteamericano e igualmente estamos seguros de que Hitler debió haber seguido siendo un pintor de casas. Por otra parte, entre los extremos de la certidumbre, hay una gama de opiniones que corresponden al grado de nuestros conocimientos.

En un sentido, es indudablemente cierto que nuestras opiniones racionales son subjetivas. A pesar de eso, si estamos convencidos de la verdad o falsedad objetiva de todas las proposiciones, no podemos, si es que queremos ser racionales, dejarnos guiar por la sola intensidad de la creencia. Como principio, las conclusiones imperfectas basadas en conocimientos limitados y razonamientos correctos, son infinitamente preferibles a los resultados correctos obtenidos por razonamientos defectuosos. Es únicamente así como nos aproximamos, débilmente, a la vida de la razón.

Además, creemos que si la noción de probabilidad es tratada matemáticamente, debe proporcionarnos un mejor material para medir, más adecuado que la simple fuerza de la creencia. En la mayor parte de los casos no puede asignarse una magnitud numérica a la relación de probabilidad; sin embargo, la probabilidad sólo puede ser considerada por el matemático cuando es medible y contable. Si la probabilidad debe servir para describir ciertos aspectos del mundo mediante fracciones, debe ser expresable como un número. Cuando una cosa no puede suceder, su probabilidad es 0; si es indudable que ocurrirá, su probabilidad es 1. Toda proba-

bilidad comprendida entre estos extremos puede expresarse como una fracción que varía entre 0 y 1. Pero formar estas fracciones implica medición y recuento; ¿y de qué dispone el matemático para medir la "intensidad de una creencia"? Éste es un problema para el psicólogo. Aun cuando pudiera inventarse un instrumento para medir la intensidad de las opiniones, su valor sería poco mayor que el del detector de mentiras, esa joya de la jurisprudencia. Las personas difieren mucho en sus pareceres sobre el mismo conjunto de hechos. Lo que para un hombre es perfectamente evidente, para otro no resulta de manera alguna convincente; y nuestras opiniones, a menudo vagamente concebidas y relacionadas sin cohesión alguna, están demasiado vinculadas a nuestras emociones y prejuicios como para considerarlas aisladamente.

Una de las dificultades que surgen del punto de vista subjetivo de la probabilidad, resulta del *principio de razón insuficiente*. Este principio, que constituye la base lógica sobre la cual debe asentarse el cálculo de probabilidades desde el punto de vista subjetivo, sostiene que, *si ignoramos completamente los diferentes modos en que puede ocurrir un suceso y no tenemos, por lo tanto, ninguna base razonable de preferencia, es tan probable que ese suceso ocurra de una manera como de otra*. Desde que por vez primera este principio fue enunciado por Jacques Bernoulli, ha sido detenidamente analizado por los matemáticos. Como el principio se basa sobre la ignorancia, parecería deducirse que el cálculo de la probabilidad será más efectivo cuando lo usen aquellos que tengan una "ignorancia igualmente equilibrada". Por mucho que los hombres se aproximen a este ideal, los filósofos y los matemáticos se tienen en más alta estima y, así, el principio ha caído en desuso.

Sin embargo, contiene un elemento de verdad y no puede desarrollarse ningún cálculo de probabilidad compatible, sin depender de él en cierto modo. Principalmente, tiene valor como criterio negativo en el sentido de que no puede decirse que dos acontecimientos son igualmente probables si hay fundamentos para preferir uno al otro.

Cuando se usa sin gran cautela, el principio de razón insuficiente da lugar a contradicciones. Dos ejemplos: Tómese el caso de un mono al que se le da una cantidad de tarjetas, cada una de las cuales lleva impresa una palabra. ¿Es igualmente probable que, de cualquier manera que las ordene, producirá o no una frase con sentido? Esto, aunque evidentemente absurdo, es lo que parecería deducirse del principio de razón insuficiente. Del mismo modo, no teniendo evidencia de si Marte está habitado o no, podríamos llegar a la conclusión de que la probabilidad de que esté *exclusivamente* habitado por nazis es ½, y podríamos asimismo concluir que la probabilidad de cada una de las proposiciones: "Marte está exclusivamente habitado por necios" y "Marte está exclusivamente habitado por hormigas blancas" es también ½. Pero esto nos pone frente al caso imposible de *tres alternativas que se excluyen*, todas tan probables así como no probables[3].

Una teoría mucho más aplicable y difundida, que evita algunas de estas dificultades, es la *frecuencia relativa* o interpretación *estadística*. Puede atribuirse, en gran medida, a este punto de vista el adelanto registrado en la aplicación de la probabilidad, no sólo a la física y a la astronomía, sino también a la biología, a las ciencias sociales y a los negocios. La interpretación estadística está estrechamente relacionada con el punto de vista expresado por Aristóteles: lo probable es aquello que ocurre usualmente.

Se considera a la probabilidad como la frecuencia relativa con la cual ocurre un suceso en cierta clase de acontecimientos. Así, la probabilidad de un suceso está expresada como

una relación matemática definida que se fija hipotéticamente. La hipótesis puede ser verificada ya sea racionalmente, demostrando, por ejemplo, que en base a nuestro conocimiento de las causas mecánicas, una moneda o un par de dados *deben* caer de cierta manera; o experimentalmente, demostrando que la moneda o el par de dados *caen*, efectivamente, de esa manera.

Supongamos que se arroja al azar una moneda. No teniendo conocimientos especiales, no hay razón para predecir cómo caerá la moneda, si cara o cruz. Si es arrojada muchísimas veces y se registra la relación entre cara y cruz, supongamos que se obtienen las siguientes frecuencias:

Número de tiradas	Resultados	
15	6 caras;	9 cruces
20	9 caras;	11 cruces
30	16 caras;	14 cruces
40	21 caras;	19 cruces
80	41 caras;	39 cruces
150	74 caras;	76 cruces

Notamos que la *relación* de caras y el número total de tiradas, a medida que éste aumenta, se aproxima más y más a la fracción ½, que representa la frecuencia relativa del conjunto de caras en el conjunto mayor de tiradas. Anticipamos entonces una predicción general, obtenida de un gran número de casos particulares y suponemos que el futuro será consistente con el pasado.

Sin embargo, consideremos por ahora: ¿Qué justificación hay para dar semejante paso? Habiendo realizado nuestro experimento y determinado la frecuencia relativa, decimos ahora que la probabilidad de obtener una cara es ½. Evidentemente, esa proposición es una hipótesis. Con nuevos experimentos podremos reforzar nuestra creencia en esa hipótesis, o bien servirán para que la modifiquemos o la abandonemos. La suposición (basada en nuestro experimento) es que en un gran número de casos, las caras aparecerán tantas veces como las cruces. Si los resultados no corroboran esta hipótesis, llegamos a la conclusión de que la moneda es, quizá, más pesada de un lado que de otro. Pero es importante recordar que ya que la demostración no es lógica, sino solamente experimental, nunca es completa, pues está sujeta siempre a ulteriores experimentos. Una demostración lógica es solamente posible si se conocen todas las causas que afectan a un evento. Evidentemente, fuera de las matemáticas mismas, no puede aparecer una ocasión semejante. De este modo, la verificación de una hipótesis por la experimentación, sólo puede demostrar que, en la práctica real, la frecuencia relativa *se aproxima* a la probabilidad pronosticada, esto es, que nuestras suposiciones son confirmadas por la experiencia.

Es oportuno señalar en qué forma el método lógico o deductivo difiere del experimental. "El proceso de inducción, que es básico en todas las ciencias experimentales, está desterrado para siempre de las matemáticas rigurosas..."[4] A fin de demostrar una proposición en matemáticas, ni siquiera un enorme número de casos donde se apreciara su validez sería suficiente, por cuanto una excepción bastaría para invalidarla. Las proposiciones de matemáticas son solamente verdaderas si no conducen a contradicciones. Pero fuera de las matemáticas, en todas las demás actividades humanas tal restricción tendría un efecto paralizador. El procedimiento científico se apoya sobre la misma regla empírica conveniente que nos sirve de guía en los asuntos prácticos: Una hipótesis es valedera si con más frecuencia nos lleva a resultados correctos que a resultados incorrectos; las verificaciones experimentales son completamente decisivas —hasta que el experimento llevado a cabo al día siguiente las invalide.

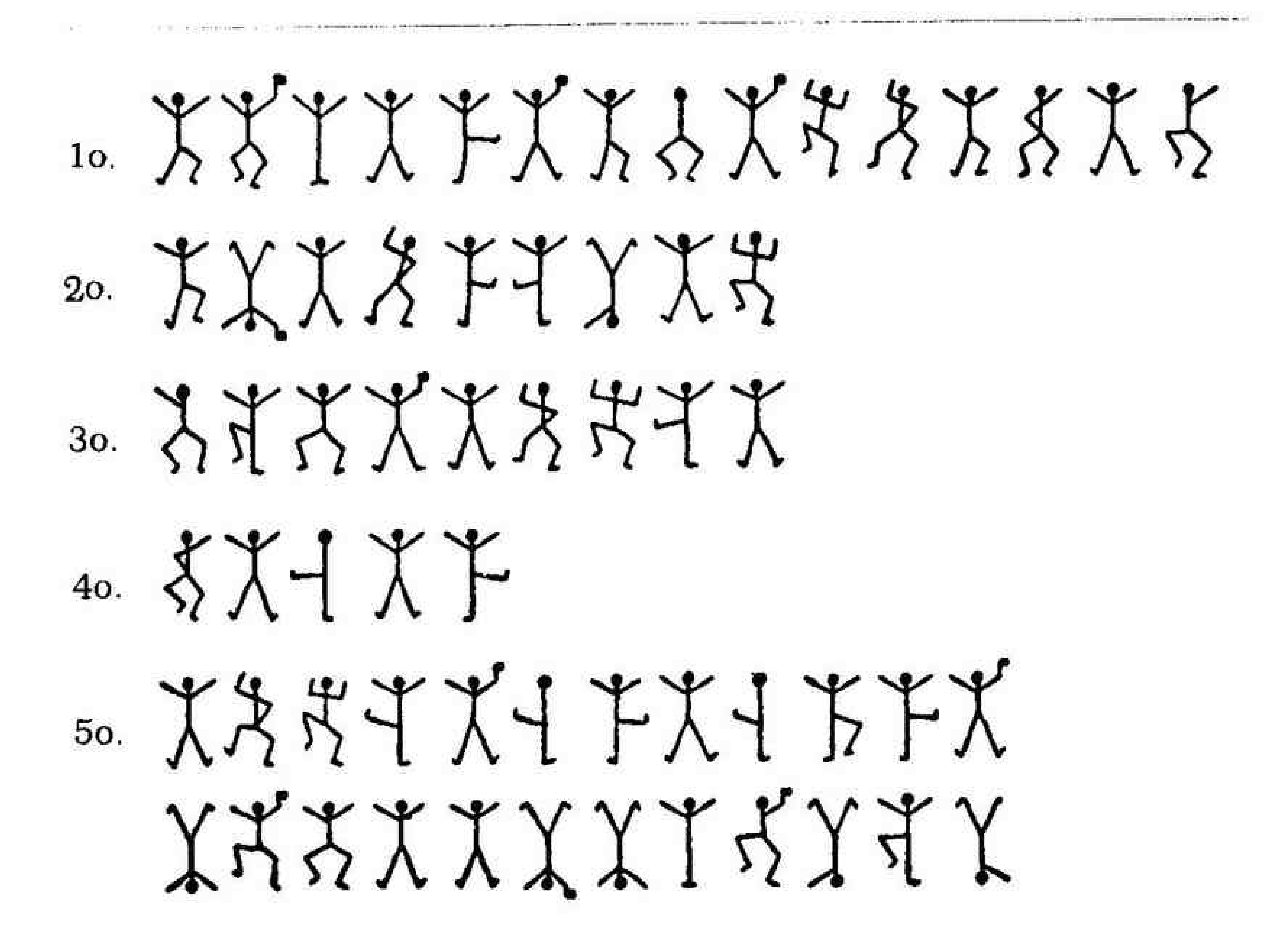


Fig. 76

"La aventura de los bailarines", de donde se extrajo el incidente relatado al comenzar este capítulo, puede servir nuevamente para enseñar cómo el método estadístico es de utilidad en la inferencia probable. A Holmes se le presenta un criptograma compuesto de varios mensajes (v. fig. 76).

La solución de la mayor parte de los criptogramas depende de muchísimo de cierto conocimiento estadístico, como asimismo de deducciones perspicaces. Holmes dedujo su método de solución de otro ya indicado por Edgar Allan Poe en *The Gold Bug*.

"Sin embargo, habiendo ya conocido que los símbolos representan letras y habiendo aplicado las reglas que nos guían en todas las formas de las escrituras secretas, la solución era bastante fácil. El primer mensaje que me fue presen-

tado era tan breve que me resultaba imposible decir con seguridad que el símbolo representaba una E. Como usted sabe, la letra E es la más común del alfabeto inglés y predomina de tal modo que aun en una frase corta es dable encontrarla frecuentemente. De los quince símbolos contenidos en el primer mensaje, cuatro eran iguales, de manera que era razonable suponer que representaban la letra E. Verdad es que en algunos casos la figura sostenía una bandera y en otros no, pero era probable, de acuerdo a la manera en que estaban distribuidas las banderas, que las mismas habían sido utilizadas para dividir la frase en palabras. Acepté esto como una hipótesis, anotando que la letra E estaba representada por el símbolo .

Pero ahora surgió la verdadera dificultad en la investigación. El orden de las letras inglesas después de la E, no está, en modo alguno, bien definido y cualquier preponderancia que se observe en el promedio de una hoja impresa puede trastocarse en una sencilla frase corta. Hablando en términos generales: T, A, O, I, N, S, H, R, D y L es el orden de más frecuente aparición de las letras, pero T, A, O e I están casi igualadas y sería una tarea interminable ensayar cada combinación hasta llegar a dar con un significado. Por lo tanto, esperé obtener material fresco. En mi segunda entrevista con Mr. Hilton Cubitt, pudo proporcionarme otras dos frases breves y un mensaje que parecería estar formado por una sola palabras, puesto que no tenía bandera alguna. Ahora bien, en la palabra única ya he conseguido las dos E, segunda y cuarta en un vocablo de cinco letras. Podría ser "sever" (separar), "lever" (palanca) o "never" (nunca). No puede haber duda alguna de que esta última acepción, considerada como una respuesta a un llamado, es, con mucho, la más probable y las circunstancias la señalaban como una respuesta escrita por la dama. Aceptándolo así, podemos afirmar ahora que los símbolos representan, respectivamente, a N, V y R.

Pero, con todo, aún hallaba una dificultad considerable, cuando una idea feliz me puso en posesión de varias otras letras. Se me ocurrió que si estos requerimientos provenían, como lo esperaba, de alguien que había sido amigo íntimo de la dama de su juventud, una combinación que contenía dos veces E, con tres letras intercaladas, podría muy bien significar el nombre "ELSIE". Al examinarlo, observé que dicha combinación constituía la terminación del mensaje y que se repetía tres veces. Se trataba, evidentemente, de algún llamado a "Elsie". De esta manera conseguí mi L, S, e I. Pero, ¿qué clase de llamado podría ser? Había sólo cuatro letras en la palabra que precedía a "Elsie" y terminaba en E. Con toda seguridad la palabra debía ser "COME" (Venga). Ensayé todas las palabras de cuatro letras que terminan con E, pero no pude encontrar una que se adaptara a este caso. Luego, estaba ya en posesión de C, O y M y en condiciones, por lo tanto, de atacar al primer mensaje una vez más, dividiéndolo en palabras y colocando puntos en el lugar de cada símbolo aún desconocido. De esta manera obtuve:

.M .ERE .E SL. NE.

Ahora bien la primera letra *sólo* puede ser A, lo cual constituye un descubrimiento muy útil, puesto que se repite no menos de tres veces en esta breve frase y también es evidente la H en la segunda palabra. Queda entonces:

AM HERE A. E SLANE.

Y llenando los vacíos evidentes en el nombre resulta: AM HERE ABE SLANEY (Estoy aquí, Abelardo Slaney).

A pesar de los brillantes éxitos alcanzados por el método estadístico, el mismo es susceptible de serias objeciones.

Mientras que algunas de sus dificultades pueden remediarse sin perjudicar en gran parte su utilidad, otras no pueden eliminarse tan fácilmente.

El concepto de límite, que desempeña un papel tan importante en muchas ramas de las matemáticas, se usa también en estadística, aunque aquí su empleo apenas puede ser defendido, puesto que este concepto se presenta, con propiedad, en relación a procesos infinitos. El estadístico lo usa diciendo que las frecuencias se aproximan a una razón límite, pero ni el estadístico ni el físico tratan con el infinito, sino más bien con fenómenos que, por grandes y complejos que sean, son *finitos y limitados*. El hecho de que un experimento produzca el mismo resultado 1.000 veces seguidas no constituye una prueba de que los resultados subsiguientes serán compatibles con los anteriores. Incluso Scherezade pudo haber contado un cuento muy desagradable en la noche mil dos.

Difícilmente puede decirse que las frecuencias relativas se aproximan a un límite matemático. El concepto de límite, tal como se le emplea en la teoría de la frecuencia relativa tiene, en términos generales, la misma relación con el concepto matemático de límite como el razonamiento por inferencia probable con respecto al silogismo.

Frecuentemente se hacen referencias a la probabilidad de acontecimientos del pasado, aunque semejante probabilidad, en función del punto de vista de la frecuencia relativa no tiene, aparentemente, significado alguno: "Es poco probable que John Wilkes Booth escapara de los soldados federales después del asesinato de Lincoln", o "Enrique VIII probablemente no estaba tan interesado en la Reforma, cuando rompió con el Papa, como en librarse de Catalina de Aragón". ¿Cómo serán evaluadas tales proposiciones, si la probabilidad es la frecuencia relativa de un suceso dentro de una clase de acontecimientos? En realidad, tratándose de un suceso

pasado o futuro, *¿qué quiere decir la probabilidad de un solo suceso?*

Cualquiera que sea la interpretación de la probabilidad que se anticipe, este problema es particularmente difícil. La opinión más acreditada es que la probabilidad no tiene significado alguno cuando se aplica a un único suceso, ya sea pasado o futuro.

De acuerdo a la interpretación estadística, la probabilidad se puede referir a un único suceso solamente en relación a una clase de acontecimientos similares. Pero esto, a menudo, lleva a confusiones. Todo el mundo estará de acuerdo en que el siguiente razonamiento es absurdo: En cierta comunidad, el registro de nacimientos en los últimos 10 años, acusa una relación de 51 niñas a 50 niños. Las primeras 35 criaturas nacidas en un mes determinado son niñas. El señor Gómez, que está esperando ser padre, está, por lo tanto, seguro de que las probabilidades están a su favor y que su esposa le obsequiará con un niño, debido a la "ley de los promedios" *.

Por otra parte, es un error muy común de la misma naturaleza y en el cual todavía incurrimos intuitivamente, que si X saca siete cinco veces seguidas al tirar los dados, la probabilidad de obtener otro siete en la próxima tirada es mucho menor que para cualquier otro número particular. Nos resulta difícil creer que la probabilidad matemática, el azar de un futuro suceso, donde los acontecimientos son independientes, no es afectada, para nada, por lo que ya ha sucedido.

En nuestra vida diaria rechazamos instintiva y deliberadamente este principio. Cuando la lógica dice "se debe", contestamos frecuentemente: "Ahora no." El famoso pragmático Charles S. Peirce describe muy bien este punto: "Si un hombre tuviese que elegir entre retirar una carta de un juego de

* Para no dejar al lector en suspenso, aclaremos que el Sr. Gómez está en la misma situación que si no hubieran sucedido los nacimientos de las primeras 35 criaturas.

naipes que contiene 25 cartas rojas y una negra, o de un juego de naipes constituido por 25 cartas negras y una roja; y si por retirar una carta roja su destino lo transportase a la eterna felicidad mientras que si extrae una carta negra le está deparado el eterno infortunio, sería insensato negar que preferiría elegir del juego de naipes que contiene la mayor proporción de cartas rojas, aunque dada la naturaleza del riesgo, no podría repetirlo. No es fácil conciliar esto con nuestro análisis de la concepción del azar. Pero supongamos que haya elegido el juego de naipes rojo y que haya extraído la carta negra. ¿Qué consuelo tendría? Podría decir que procedió de acuerdo con la razón, pero ello sólo demostraría que su razón carecía absolutamente de valor. Y si hubiese elegido la carta roja, ¿de qué otra manera podría considerarlo sino como un accidente feliz? No podría decir que si hubiese elegido del otro juego de naipes podría haber sacado la tarjeta nefasta, porque una proposición hipotética tal como: "Si A, entonces B", nada significa con respecto a un único caso[5].

Para finalizar, una breve alusión a una interpretación de la probabilidad, que se atribuye principalmente a Peirce y que parece evitar algunas de las dificultades inherentes a las interpretaciones ya examinadas[6].

Peirce sostiene que la probabilidad se refiere no a acontecimientos sino a *proposiciones*. Con algunas modificaciones, se adhiere a este punto de vista John Maynard Keynes en su notable *Tratado sobre la Probabilidad*. Según Peirce, la probabilidad nada tiene que ver con la intensidad de creencia ni con las frecuencias estadísticas. En lugar de hablar de un suceso tal como "caras", la *teoría de la frecuencia verdadera* discute *proposiciones* tales como "Esta moneda al ser arrojada caerá cara". La probabilidad de la verdad de esta proposición debe ser la misma que la frecuencia relativa con la cual tiene lugar el suceso "cara" en una serie de tiradas.

Esta interpretación de la probabilidad es mucho más ade-

cuada para estimar los acontecimientos aislados. La proposición "Probablemente lloverá mañana" significa que las proposiciones sobre el estado del tiempo, temperatura, presión barométrica, etc., nos inducen a formular esa expresión. En otras palabras, si de nuestro conocimiento del tiempo, inferimos esta última proposición, estaremos, más a menudo, en lo cierto que en lo erróneo.

Antes de entrar a considerar unos pocos de los teoremas del cálculo de probabilidades, es menester una advertencia previa. Todo cuanto se ha dicho hasta ahora señala un hecho inequívoco: *Ninguna proposición tiene una verdad probable, excepto en relación a otro conocimiento.* Decir que una proposición es probable, cuando el conocimiento sobre el que se basa es oscuro o inexistente, es absurdo. A menudo hacemos, indudablemente, afirmaciones tácitas acerca de la probabilidad, donde se comprende claramente a qué conjunto de conocimientos nos referimos. Esto es tan permisible como decir que San Francisco está a 3.000 millas siendo evidente que lo que se quiere decir es que "San Francisco está a 3.000 millas de Nueva York". Como ya se ha destacado, es más loable adherirse a una proposición que resulta errónea, en tanto que, la evidencia en virtud de la cual llegamos a nuestra conclusión es la mejor aprovechable, que adelantar una proposición verdadera en base a un razonamiento defectuoso o hechos incorrectos. Herodoto dice: "Nada hay más provechoso al hombre que tomar buen consejo de sí mismo; porque aun si el acontecimiento resulta contrario a sus esperanzas, la resolución de uno sigue siendo correcta aun cuando no haya sido favorecida por la fortuna; mientras que si un hombre procede contrariamente al buen consejo, aunque sea afortunado, y consiga lo que no tenía derecho a esperar, no por eso su resolución era menos engañosa."

EL CÁLCULO DEL AZAR

Tomado con moderación, el juego por dinero tiene virtudes innegables. Sin embargo, presenta un curioso espectáculo lleno de contradicciones. Mientras quienes palidecen por temor a las llamas del infierno no se entregan jamás a sus placeres, los grandes laboratorios y las respetables compañías de seguros se levantan como monumentos a una ciencia que tuvo sus orígenes en el cubilete de dados.

El Caballero de Méré, eufemísticamente llamado el "filósofo jugador" del siglo XVII, deseoso de obtener algunos informes sobre el reparto de riesgos en los juegos de dados, se dirigió a uno de los matemáticos más talentosos de todos los tiempos —el apacible y pío Blaise Pascal. Pascal, a su vez, escribió a un matemático aún más célebre, el Consejero Parlamentario de la Ciudad de Toulouse, Pierre de Fermat, y, en la correspondencia que se sucedió, vio por primera vez la luz del día la teoría de la probabilidad.

Pascal no pudo reprimirse ante un leve reproche de De Méré, no porque éste fuese un jugador, sino por la razón más seria de que De Méré no era matemático: *"Car, il a très bon esprit"* (escribió a Fermat), *"mais il n'est pas geomètre; c'est comme vous savez un grand défaut"*. En realidad, el Caballero merecía algo peor, puesto que la respuesta a su pregunta, que evidentemente estorbó a sus negocios, le impulsó a escribir una diatriba sobre la inutilidad de todas las ciencias, en particular la aritmética. Y ésa fue la suerte de la primera asociación de cerebros.

El interés por la probabilidad aumentó, estimulado por las investigaciones de eminentes matemáticos como Leibniz, Jacques Bernoulli, De Moivre, Euler, el marqués de Condorcet y, sobre todo, Laplace. La obra de este último hizo época, pues en su teoría analítica de la probabilidad, llevó el

cálculo a un punto tal que Clerk Maxwell pudo decir que es "matemática para hombres prácticos" y Jevons pudo afirmar, en forma completamente lírica (citando al obispo Butler sin declararlo), que las matemáticas de la probabilidad son "la verdadera guía de la vida y difícilmente podemos dar un paso o adoptar una decisión sin hacer, correcta o incorrectamente, un cálculo de probabilidad". Y estas opiniones fueron emitidas aun antes de que el cálculo hubiese alcanzado sus más brillantes éxitos en física y en genética, o en esferas más prácticas[7]. Era en verdad notable, como escribió Laplace, que "una ciencia que se inició con las consideraciones del juego, se hubiese elevado a los objetos más importantes de la sabiduría humana".

Al desarrollar un cálculo de probabilidades es necesario hacer ciertas suposiciones ideales. En particular, dado que muchísimas cosas a las que desearíamos aplicarlo *no son susceptibles de medida*, debemos ser doblemente cuidadosos en que los axiomas y postulados que formulemos sean precisos, de modo que su campo de aplicación pueda establecerse fácilmente. Ya nos hemos referido al hecho de que la probabilidad matemática de un acontecimiento oscila entre 0 y 1. La probabilidad de un acontecimiento imposible es 0 y la de uno seguro es 1.

Debemos ahora definir qué significa "equiprobable" (igualmente probable). Esto constituye una tarea relativamente difícil; pero, para nuestros propósitos, podemos acortar el camino empleando una definición aproximada.

Dos acontecimientos contingentes serán considerados equiprobables si, ya sea por falta de evidencia, o después de considerar todas las circunstancias que hagan al caso, no es de esperar que se dé un acontecimiento con preferencia al otro.

Quizás el lector descubra una incongruencia. ¿No se le había advertido, acaso, que no puede apreciarse probabilidad alguna donde falta un conocimiento relevante o apropiado? Sin embargo, aquí se dice que dos proposiciones, o dos acontecimientos, pueden ser igualmente probables, aun si carecemos de conocimiento alguno, cualquiera que sea. ¡Pero ahí está la clave! Un poco de conocimiento es peligroso, mientras que carecer de él por completo es mucho más satisfactorio. Para nuestros fines invocamos el principio de razón insuficiente, de acuerdo al cual, a falta de un conocimiento sobre dos acontecimientos, los consideramos igualmente probables. El lector no debe olvidar que nuestra definición es sólo aproximada —muy burda. Y también que es posible saber que dos cantidades son iguales sin saber qué son. Así, alguien que tenga un conocimiento general sobre los juegos puede saber que en el ajedrez ambas partes comienzan con fuerzas iguales, sin saber cuáles son éstas, o cualquier otra cosa acerca del juego.

Si suponemos, entonces, que una moneda es simétrica, es *equiprobable* que caerá cara o cruz, ya que no hay razón alguna para anticipar un resultado u otro.

Si hay un número de modos equiprobables en que puede ocurrir un suceso y un número de modos equiprobables en que no puede suceder, la probabilidad de que ocurra el suceso es la relación existente entre el número de modos en que el suceso puede acontecer, con respecto al número total de modos en el que puede y no puede suceder. La moneda puede caer cara o cruz. La probabilidad de que sea cara es pues, la relación: $\frac{\text{Cara}}{\text{Cara} + \text{Cruz}} = \frac{1}{2}$. En general, si llamamos *favorables* a los modos en que un acontecimiento puede suceder y *desfavorables* a los modos en que no puede ocurrir, la probabilidad de un suceso está dada por la fracción $\frac{F}{F + D}$.

Incumbe a la combinatoria, rama de las matemáticas que

se ocupa de las permutaciones y las combinaciones, determinar el número de modos diferentes en que un acontecimiento *puede* suceder. Es el estudio de la *posibilidad matemática* y proporciona un marco ideal para las *matemáticas de la probabilidad*.

Los problemas típicos de permutaciones y combinaciones tienen un aspecto árido y monótono. Al principio cuesta trabajo creer que los conocimientos que se adquieren al resolver problemas de este tipo puedan servir de mucho en otros estudios: "Cuatro viajeros llegan a un pueblo donde hay 5 hosterías. ¿De cuántas maneras distintas pueden alojarse, cada uno, en un hotel diferente?" Tampoco parece que una teoría que sirve para determinar de cuántas maneras diferentes se pueden ordenar las letras de la palabra *Mississippi*[8], pueda ser útil ya sea para determinar la física del átomo o para fijar las tasas de seguros. Sin embargo, los teoremas del análisis combinatorio son la base del cálculo de la probabilidad. Tenemos que saber calcular el número total de modos diferentes en que un evento *puede* suceder, antes de aspirar a predecir cómo es *probnble* que suceda.

Nuestra moneda, con la que ya hemos trabajado tanto, nos proporciona nuevamente un ejemplo. Para ello la arrojamos tres veces seguidas, siendo posibles los resultados de la figura 77.

Estos ocho resultados posibles contestan todas las preguntas que podrían formularse en permutaciones y combinaciones. Pero además, cualesquiera otras que surjan en el cálculo de la probabilidad, podrían también responderse con ayuda de este diagrama. Así, la *probabilidad* de obtener 3 caras, la da la relación: $\frac{F}{F+D} = \frac{1}{8}$. La probabilidad de conseguir 2 caras y 1 cruz es la relación de los casos 2, 3, 5, a todos los casos posibles, vale decir, $^3/_8$.

Es evidente ahora que la enumeración de todos los casos

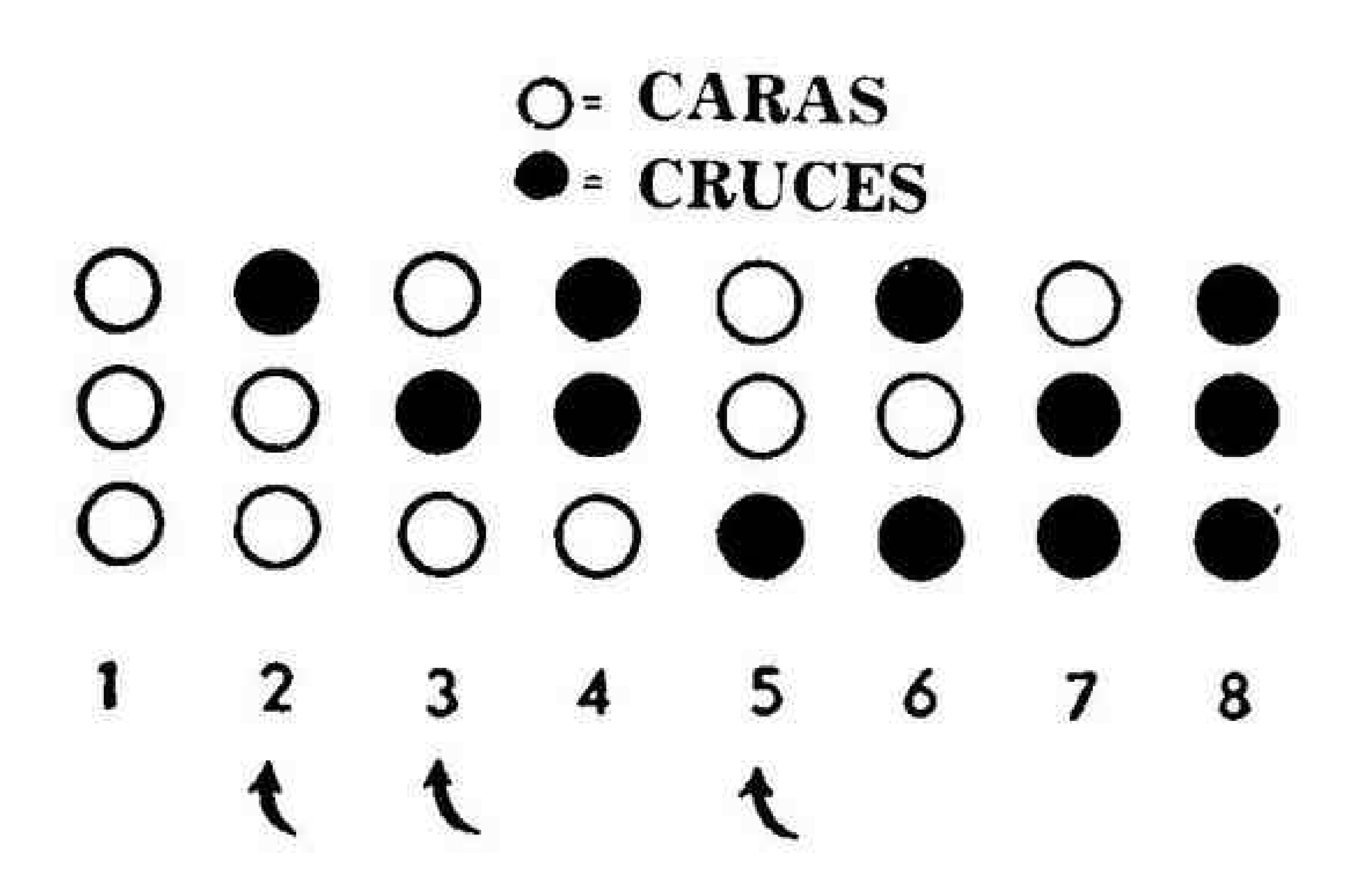


Fig. 77. Los resultados posibles de tirar tres veces una moneda. Las flechas indican los casos en que se producen dos caras y una cruz.

posibles resulta aburrida y difícil a medida que su número aumenta. Por esa razón, el cálculo contiene muchos teoremas, tomados del análisis combinatorio, que hacen innecesaria la enumeración directa.

SUCESOS QUE SE EXCLUYEN MUTUAMENTE

I. Habiendo cuatro ases en un juego de naipes, la probabilidad de retirar un as de 52 cartas, es $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. Pero, ¿cuál es la probabilidad de retirar *ya sea* un as o un rey de un juego de naipes, en una sola vez? Ésta es la probabilidad de sucesos *que se excluyen mutuamente o alternativos*; si uno de los dos sucesos ocurre, el otro no puede acontecer. Un teorema del cálculo expresa que la probabilidad de que ocurra uno entre varios sucesos que se excluyen mutuamente, es la *suma de las probabilidades de cada uno de los sucesos ais-*

lados. La probabilidad de obtener un as o un rey es, por lo tanto:

$$\frac{1}{13}+\frac{1}{13}=\frac{2}{13}.$$

¿Cuál es la probabilidad de sumar 6 ó 7, al tirar un par de dados? Podemos enumerar la totalidad de casos favorables de 6 ó 7 y luego verificar nuestros resultados con el teorema.

Primer dado		Segundo dado	Primer dado		Segundo dado
1		5	1		6
2		4	2		5
3	VI	3	3	VII	4
4		2	4		3
5		1	5		2
			6		1

Hay 36 *combinaciones posibles* de los dados y 11 son favorables al evento; por lo tanto, la probabilidad de obtener un 6 ó un 7 es: 11/36.

Si hubiésemos aplicado el teorema, habríamos tomado la suma de las probabilidades por separado, es decir: $\frac{5}{36}+\frac{6}{36}$.

SUCESOS INDEPENDIENTES

II. Se dice que dos sucesos son *independientes* uno de otro, si el acontecer de uno no está, en modo alguno, relacionado con el acontecer del otro. Se tira dos veces una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 veces cara? El teorema correspondiente establece que la *probabilidad de que ocurran a la vez dos sucesos independientes es el producto de las probabilidades individuales de cada uno de los sucesos*. La probabilidad de obtener dos caras seguidas es, por lo tanto: $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. Y, como ya hemos visto, por enumeración directa, la probabilidad de obtener 3 caras seguidas es $\frac{1}{8}$. Verificándolo con el teorema sale: $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

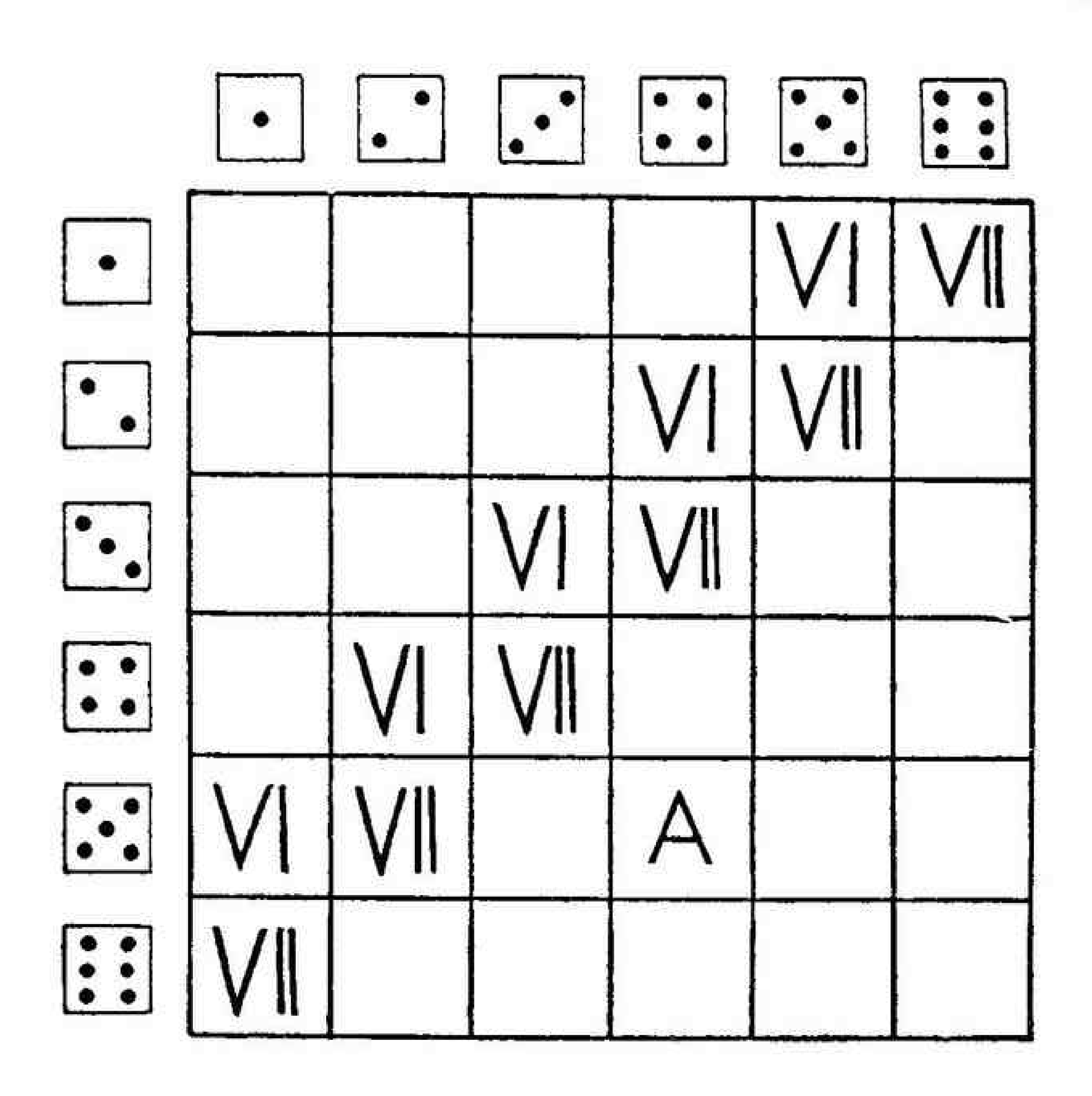


Fig. 78. Cada cuadrado representa un resultado equiprobable. Por ejemplo, el cuadrado señalado con la letra *A* representa la obtención de un 4 con un dado y 5 con el otro. De las treinta y seis posibilidades, cinco resultan con 6 y seis resultan con 7.

Consideremos ahora un problema de forma ligeramente distinta:

Al tirar una moneda dos veces seguidas, ¿cuál es la probabilidad de obtener, *por lo menos, una cara*? Este problema puede resolverse fácilmente sin enumeración, determinando la probabilidad del suceso deseado que *no* sucede y restando de 1 esta fracción. Ya que la probabilidad de obtener *dos cruces* seguidas, que es la única alternativa de sacar, por lo menos, una cara, es $\frac{1}{4}$, la probabilidad de por lo menos una cara es: $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

D'Alembert, en su artículo sobre probabilidad en la famosa *Encyclopédie*, reveló que no comprendía el teorema de multiplicar probabilidades independientes. Dudaba que la probabilidad que acabamos de indicar fuese $\frac{3}{4}$ razonando que si una cara aparecía en la primera tirada el juego habría terminado, pues no era necesario continuar con una segunda. Enumerando sólo tres casos posibles: Cara, Cruz-Cara y Cruz-Cruz, llegó a la probabilidad $\frac{2}{3}$. Pero le faltó considerar que la primera alternativa no era, en sí misma, más probable que la alternativa de obtener una cruz.

Aun cuando D'Alembert entendió decididamente mal los fundamentos de la probabilidad, algunas de sus ideas anunciaron la interpretación estadística. Sugirió que haciendo experimentos, podrían estimarse aproximaciones de probabilidades deseadas.

Mucho antes de la ola de entusiasmo por la estadística, que barrió Europa a mediados del siglo XIX, se llevaron a

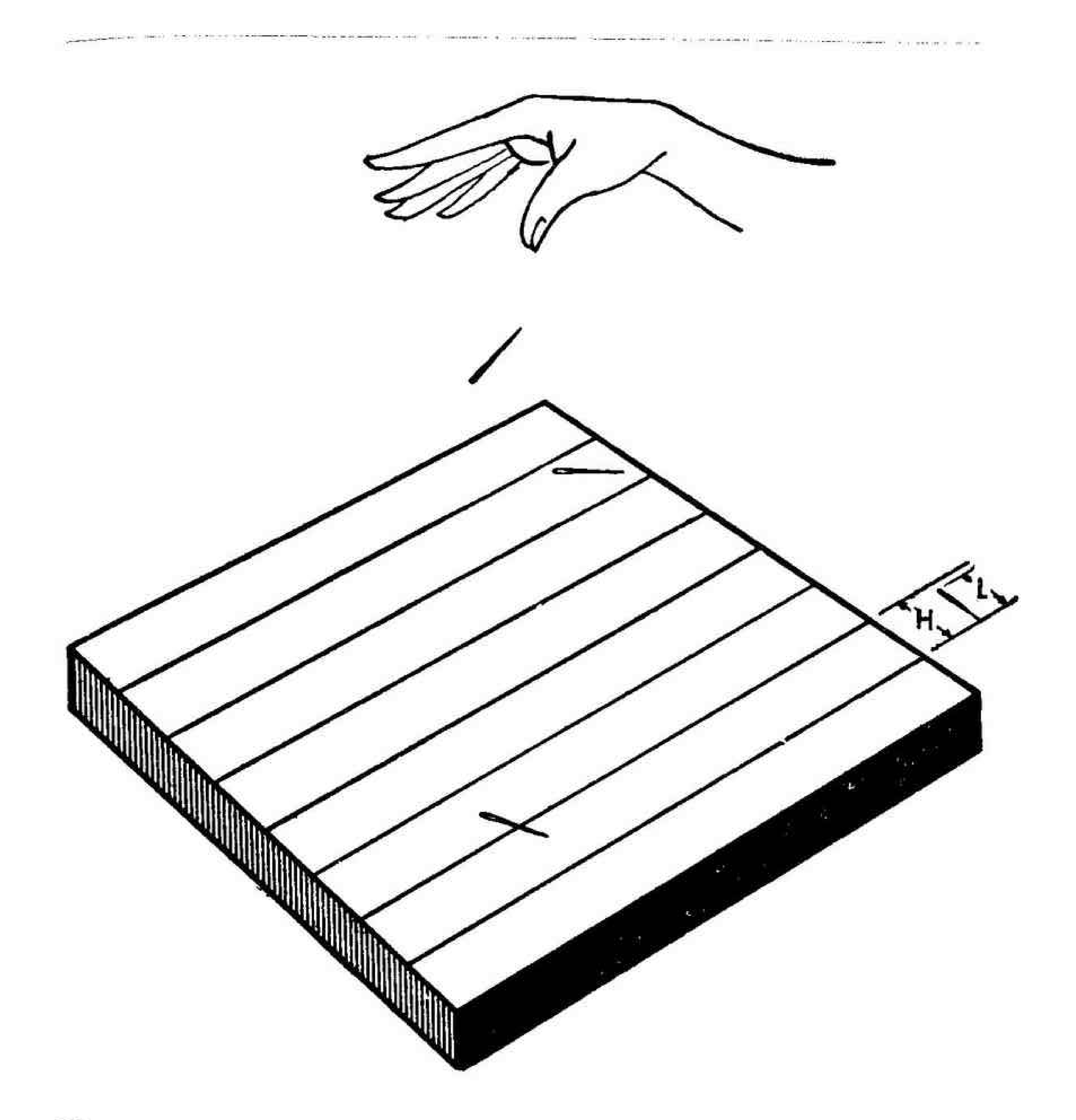


Fig. 79. Problema de la aguja del conde Buffon.

cabo experimentos de la naturaleza sugerida por D'Alembert. Un naturalista del siglo XVIII, el conde Buffon, realizó muchos experimentos, el más famoso de los cuales es su "Problema de la Aguja". Veamos en qué consiste: una superficie plana está dividida por líneas paralelas (como en la fig. 79), separadas entre sí por una distancia H; tomando una aguja de

longitud L, menor que H. Buffon la dejaba caer sobre la superficie rayada. Consideraba que la caída era favorable cuando la aguja quedaba atravesando una raya y desfavorable cuando caía entre dos rayas. Su sorprendente descubrimiento fue que la *razón* de éxitos a fracasos era una expresión en la que aparecía π. Efectivamente, si L es igual a H, la probabilidad de un éxito es $\frac{2}{\pi}$. A medida que aumentaba el número de pruebas, tanto más se aproximaba el resultado al valor de π, aun hasta tres cifras decimales.

Experimentos más completos fueron realizados en el año 1901 por un matemático italiano, Lazzerini, quien, dejando caer la aguja 3.408 veces, obtuvo para π un valor igual a 3,1415929, con un error de sólo 0,0000003. Difícilmente podría uno esperar hallar un mejor ejemplo de la interrelación de todas las matemáticas. Hasta aquí hemos visto a π de tres maneras: como la relación de la circunferencia de un círculo a su diámetro, como el límite de una serie infinita y como una medida de la probabilidad.

PROBABILIDAD COMPUESTA

III. El teorema que trata de la probabilidad de acontecimientos independientes, puede, algunas veces, ser extendido provechosamente para tratar casos en que las probabilidades no son realmente independientes.

Una bolsa contiene una bola blanca (B) y dos negras (N); la probabilidad de retirar una bola negra es $\frac{2}{3}$ y la de una bola blanca es $\frac{1}{3}$. Supongamos dos extracciones sucesivas de la misma bolsa, reemplazando la bola después de cada

extracción. Ahora, la probabilidad de retirar dos B seguidas es: $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ y de retirar dos N seguidas es: $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. Sin embargo, si después de cada extracción *no* se reemplazan las bolas, las extracciones dejan de ser *independientes* y *dependen* una de la otra. Después de cada extracción debe calcularse la nueva probabilidad a fin de formar la probabilidad *compuesta* correcta. Después de haber retirado una bola, la probabilidad de extraer dos N seguidas, sin haber habido reemplazos, es: $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

Que la probabilidad de la segunda extracción depende del resultado de la primera, se demuestra también por el hecho de que la probabilidad de sacar dos B es cero, si no se hace un reemplazo, mientras que es $\frac{1}{9}$ si la B es reemplazada en el caso de haber sido retirada la primera vez.

IV. Hasta ahora hemos considerado la probabilidad de sucesos: que se excluyen mutuamente, dependientes e independientes. Si se hacen variar y se combinan estos factores, resultan nuevos métodos interesantes.

Una bolsa contiene 6 bolas blancas (B) y 6 negras (N). Si se retira una bola, son equiparables dos acontecimientos —ya sea B o N. Esto puede indicarse así:

(a) $$(1)\ B,\ (2)\ N = 2^1$$

Los resultados posibles, en dos extracciones, son:

(b) $$(1)\ BB,\ (2)\ BN,\ (3)\ NB,\ (4)\ NN = 2^2$$

En tres extracciones hay ocho resultados posibles:

(c)

$$\left.\begin{matrix} (1)\ BBB & (3)\ BNN & (5)\ NBN & (7)\ NNB \\ (2)\ BNB & (4)\ BBN & (6)\ NBB & (8)\ NNN \end{matrix}\right\} = 2^3$$

En cuatro extracciones hay dieciséis:

(d)

$$\left.\begin{matrix} (1)\ BBBB & (5)\ NBBB & (9)\ NBNB & (13)\ NNNB \\ (2)\ BBBN & (6)\ BBNN & (10)\ BNBN & (14)\ NNBN \\ (3)\ BNBB & (7)\ BNNB & (11)\ NBBN & (15)\ NBNN \\ (4)\ BBNB & (8)\ NNBB & (12)\ BNNN & (16)\ NNNN \end{matrix}\right\} = 2^4$$

Entonces, en general, para n extracciones hay 2^n resultados posibles. ¡Pero este conocimiento es la clave de un método muy valioso! Aprovechémonos de un teorema importante de otra rama de las matemáticas: el teorema del binomio.

Si indicamos con B la *extracción* de una bola blanca y con N la de una negra, al desarrollar la expresión $(B + N)^2$, de acuerdo al teorema del binomio, obtenemos:

$$B^2 + 2BN + N^2$$

Ahora bien, esta expresión algebraica indica lo que ya se señaló explícitamente en el apartado (b), es decir: todos los resultados posibles de dos extracciones practicadas en una bolsa que contiene el mismo número de bolas negras y blancas. Así[9]:

$$\begin{matrix} (1) & BB & = B^2 \\ (2) & BN & \multirow{2}{*}{$\}= 2\,BN$} \\ (3) & NB & \\ (4) & NN & = N^2 \end{matrix}$$

Tres extracciones de dicha bolsa, se representan por la expresión:

$$B^3 + 3B^2N + 3BN^2 + N^3$$

pues, nuevamente:

$$\begin{matrix} (1) & BBB & = B^3 \\ (2) & BBN & \\ (3) & BNB & = 3B^2N \\ (4) & NBB & \\ (5) & NNB & \\ (6) & NBN & = 3BN^2 \\ (7) & BNN & \\ (8) & NNN & = N^3 \end{matrix}$$

Hay, por lo tanto, ocho resultados posibles, una manera de conseguir tres blancas, tres maneras de conseguir dos blancas y una negra, tres modos de lograr dos negras y una blanca y una manera de obtener tres negras. Las probabilidades respectivas son: $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$ y $\frac{1}{8}$.

Para n extracciones seguidas, el teorema general del binomio da[10]:

$$(B + N)^n = B^n + nB^{n-1}N + \frac{n\,(n-1)}{2!}B^{n-2}N^2 +$$

$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}B^{n-3}N^3 + \ldots + N^n.$$

Consideremos una nueva aplicación del teorema del binomio: Una bolsa contiene 3 bolas blancas y 2 negras. Después de cada extracción se reemplaza la bola. ¿Cuál es la probabilidad de obtener $3B$ y $2N$ en 5 extracciones?

Ahora bien, para cada extracción la probabilidad de una

B es $\frac{3}{5}$ y la de una N es $\frac{2}{5}$. Desarrollando:

$$(B + N)^5 = B^5 + 5B^4N + 10B^3N^2 + 10B^2N^3 + 5BN^4 + N^5$$

El resultado, cuya probabilidad buscamos, es B^3N^2 ya que representa $3B$ y $2N$. Hay diez resultados posibles puesto que el coeficiente del término B^3N^2, es 10. La probabilidad buscada, que es compuesta, debe ser, por lo tanto:

$$10 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{216}{625}$$

A estas alturas resulta completamente evidente cuán limitados son los casos en que el cálculo de la probabilidad es aplicable. En ninguno de los varios ejemplos mencionados en el segundo apartado de este capítulo, por muy adecuadamente que puedan haber ilustrado el concepto de probabilidad, tiene aplicación nuestro mecanismo matemático. En efecto, el cálculo de la probabilidad, como todas las demás disciplinas matemáticas, no puede ser considerado como una fuente de información sobre el mundo físico. Además, hablando en términos matemáticos, sería posible definir qué quiere decir equiprobable, pero sin duda es imposible encontrar dos acontecimientos en el mundo físico que sean, realmente, equiprobables.

La equiprobabilidad es, en el mundo físico, simplemente una hipótesis. Podemos emplear el mayor cuidado y usar los instrumentos científicos más exactos para determinar si una moneda es o no simétrica. Si estamos satisfechos en que lo es y nuestras pruebas en ese sentido, es concluyente, nuestro conocimiento, o mejor aún nuestra ignorancia, con respecto al enorme número de otras causas que afectan la caída de la

moneda es tan insondable, que la simetría de la misma es un mero detalle. Luego la proposición "cara y cruz son equiprobables" es, en el mejor de los casos, una suposición.

Sin embargo, el cálculo de la probabilidad solamente es útil una vez que hemos hecho una suposición —una suposición que, como todas las hipótesis en la ciencia, debe justificar su existencia por su utilidad y que, además, debemos estar preparados para modificar o descartar cuando la experiencia deja de corroborarla.

Siguiendo tan atrevido procedimiento, las matemáticas de la probabilidad han tenido notable éxito en la ciencia y en el comercio. En los siglos XVIII y XIX, cuando la ciencia y la filosofía estaban casi por completo bajo el influjo de ideas mecanicistas, se supuso con entusiasmo que el cálculo de la probabilidad supliría toda "ignorancia y flaqueza de la mente humana". El cálculo ayudaría a iluminar aquellas regiones del conocimiento donde el faro de la ciencia no alumbraba aún muy brillantemente.

Es fácilmente comprensible que se hiciera popular una filosofía materialista, conveniente y dogmática, en un mundo que había sido testigo de una sucesión de proezas científicas, desde Kepler a Galileo y desde Newton a Laplace. El concepto materialista está basado en una fe intuitiva en la regularidad y el orden periódico en que se cumplen los fenómenos naturales, desde el comportamiento de los átomos hasta el nuestro al levantarnos por la mañana. Los hombres esperaban, y la historia de la ciencia hasta hacía muy poco los alentaba a creerlo, que la ciencia explicaría todos los milagros y revelaría todos los secretos, que el futuro estaba contenido en el pasado y que, por lo tanto, debía parecerse a él, y en consecuencia, las experiencias del pasado ayudarían a predecir el futuro.

Como representante sobresaliente de estos puntos de vista, Laplace depositaba mucho mayores esperanzas en los lí-

mites de los conocimientos que en el modesto crepúsculo de la mediocridad en el que la mente humana, según opinaba Locke, tendría que andar siempre a tientas.

"Es nuestro deber entonces", escribió Laplace, "considerar el estado actual del Universo como un efecto de su anterior estado y como la causa de uno que lo sucederá. Si fuera dable tener por un instante una inteligencia que pudiera abarcar todas las fuerzas que animan a la naturaleza y la situación respectiva de los seres que la componen —una inteligencia suficientemente enorme como para someter al análisis estos datos— comprendería en la misma fórmula el movimiento de los cuerpos más grandes del Universo y el del átomo más liviano; para ella nada sería incierto y el futuro, así como el pasado, se presentarían ante sus ojos"[11].

Cuando Napoleón le preguntó a Laplace en qué lugar de su obra monumental *Mécanique Céleste* había alguna referencia a la Divinidad, se dice que le respondió: "Señor, no tengo necesidad de esa hipótesis." Oyendo a Napoleón relatar esta anécdota, Lagrange hizo notar: "Esa, Excelencia, es una hipótesis maravillosa." La física moderna, y en realidad toda la ciencia moderna, es tan humilde como Lagrange y tan agnóstica como Laplace. No creyendo en Dios, no se atribuye a sí misma ni omnisciencia divina, ni la posibilidad de alcanzarla.

Allá por el siglo XVIII se tenía la convicción de que la utopía de la perfección moral y política estaba cercana, y más todavía, la perfección en las ciencias físicas. Aunque no se hubieran descubierto todavía las leyes naturales exactas que gobernaban estos campos, nadie dudaba de que existieran. Entre tanto, el cálculo de probabilidades supliría la deficiencia. Cierto era que no se conocían con tanta precisión los fenómenos sociales como los movimientos de los planetas, pero se daba por seguro que al ser estudiados a gran escala presentarían las mismas regularidades que aquéllos. La probabilidad iba a ser un recurso provisional, a modo de mapa de artillería, que los hombres de ciencia completarían a su debido tiempo.

Las esperanzas eran muchas y entre aquellos que más esperaban se contaba el marqués de Condorcet. La teoría de la probabilidad, pensaba, podría aplicarse eficazmente a los juicios de los tribunales a fin de reducir a un mínimo el peligro de fallos erróneos. Con ese propósito sugirió que, aumentando el número de jueces en cualquier tribunal, se asegurarían muchísimas opiniones independientes que, al ser aunadas, constituirían una salvaguardia de la verdad, neutralizando las opiniones extremas y los puntos de vista perjudiciales. Desgraciadamente Condorcet olvidó tomar en consideración otros numerosos factores, de los cuales no era el menor la lógica de los devotos de la guillotina, y precisamente fue a ésta a la que lo envió finalmente, como una ironía y una tragedia a la vez, el juicio de un tribunal revolucionario, compuesto por muchos jueces, todos los cuales sostenían las mismas opiniones extremas.

En la atmósfera menos caldeada del siglo XIX, fueron vindicados algunos de los puntos de vista de Condorcet —ya que no en la moral ni en la política, por lo menos en la ciencia y en la industria. La consideración estadística de la naturaleza alteró el mapa de la ciencia en los siglos XIX y XX, tanto, quizá, como los inventos y los descubrimientos del laboratorio. En realidad (y no nos cansamos de destacar este punto), la consideración estadística se ha difundido y ha penetrado tanto en el pensamiento científico moderno y en el método, que ha llegado mucho más allá de lo que Condorcet podría haberse imaginado. Pero el materialismo fundamental de su tiempo, que acompañó a esta fe en la probabilidad, se ha desvanecido por completo.

En lugar de servir como un recurso, como un sustituto para las leyes naturales aún no reveladas, la deducción esta-

dística ha llegado a tiempo para suplantarlas casi completamente. Esto significa un cambio en la interpretación de la realidad física, comparable en importancia intelectual al Renacimiento. Teniendo esto bien presente, los físicos contemporáneos se refieren frecuentemente al Renacimiento de la Física Moderna.

En su gran obra sobre la *Teoría Analítica del Calor*, Fourier enunció el principio que mejor sirve de ejemplo a lo que ya hemos mencionado como el punto de vista clásico de la física, y en realidad de todas las leyes naturales: "Las causas fundamentales nos son desconocidas, pero están sometidas a leyes simples y constantes, que pueden descubrirse mediante la observación; el estudio de ellas constituye el objeto de la filosofía natural." Y continuó, agregando: "El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fecunda en descubrimientos matemáticos... No puede haber un idioma más sencillo, más libre de errores y de oscuridades, es decir, más digno para expresar las relaciones de las cosas naturales... Reúne fenómenos de lo más diversos y descubre las analogías ocultas que los relacionan."

El hombre de ciencia de la actualidad, particularmente el físico, estaría de completo acuerdo con la última parte de esa cita. Convendría en que las matemáticas constituyen el idioma ideal para expresar los resultados de sus observaciones y aun las incertidumbres de sus predicciones. Sin embargo, disentiría sensiblemente con Fourier, cuando éste dice que las leyes que rigen los fenómenos naturales son "*simples*" y "*constantes*".

En lugar de sostener la opinión de que la naturaleza obedece a leyes perfectas y seguras, que es tarea del hombre de ciencia descubrir y explicar, el físico se contenta con formular hipótesis y realizar experimentos para llevar una especie de

teneduría de libros científica, con ayuda de la cual hace un balance de tiempo en tiempo. Ese balance no tiene relación alguna con las verdades eternas. Se refiere únicamente a activos y pasivos. En lugar de aplicar su fe a descubrir en todos los fenómenos naturales un orden general, regular y periódico, se contenta con la esperanza de que haya un método casual en la locura del mundo físico; que en lo grande, ya que no en lo pequeño, haya alguna apariencia de un plan.

El viejo dogmatismo materialista parecía excluir ulteriores especulaciones metafísicas acerca de la naturaleza de la realidad y era "cómodo y completo". Tenía el "poder compulsivo de la vieja lógica". El plan general del mundo era riguroso y seguro y los misterios del Universo, sus aparentes incertidumbres, eran las confesiones de nuestra propia incapacidad, de nuestras propias limitaciones. Cuando decíamos que la caída de una moneda estaba determinada por el azar "considerábamos esta confesión de incertidumbre como debida a nuestra propia ignorancia y no a las incertidumbres de la naturaleza".

Pero la nueva física y la nueva lógica han cambiado nuestros puntos de vista tan profundamente como han alterado nuestra distinción básica entre materia y energía. "Comenzamos teniendo prejuicios contra la probabilidad, considerándola como un sustituto, y predispuestos en favor de la causalidad" y terminamos convencidos de que los contornos del mundo "no son definidos, sino vagos" y que nuestras leyes científicas más exactas son sólo aproximadas, aunque bastante buenas para nuestros rudimentarios sentidos. Así, en lugar del silogismo y las leyes de la lógica formal, nuestras ideas sobre el universo físico deben estar formadas enteramente por las reglas de la inferencia probable. Hemos de traducir: "Sócrates es un hombre; todos los hombres son mortales, por lo tanto, Sócrates es mortal", como una proposición sobre el mundo de los hechos, en "Sócrates probable-

mente morirá, porque de acuerdo con todo lo que sabemos hasta ahora, todos los hombres antes que él han muerto". "Las incertidumbres del mundo las atribuimos ahora, no a las incertidumbres de nuestros pensamientos, sino más bien al carácter del mundo que nos rodea. Es un punto de vista más sensato, más maduro y comprehensivo." [12]

Aquí recordamos las patéticas palabras de Charles Peirce: "Todos los asuntos humanos descansan sobre las probabilidades y la misma cosa es verdadera en todas partes. Si el hombre fuese inmortal, podría estar perfectamente seguro de ver el día en que todo aquello en que había confiado traicionaría su fe, y, en suma, de llegar, con el tiempo, a una miseria sin esperanza. Se derrumbaría, al final, como todas las grandes fortunas, las dinastías y las civilizaciones. En lugar de esto tenemos la muerte.

"Pero lo que, sin la muerte, sucedería a cada hombre, con la muerte debe ocurrirle a algún hombre... Me parece que somos conducidos a ésta, que la lógica requiere inexorablemente que nuestros intereses *no* serán limitados. No deben detenerse ante nuestro propio destino, sino que deben abarcar a toda la sociedad."

APÉNDICE

Una discusión sobre la teoría de la probabilidad, mal puede omitir algunas aplicaciones. Son, sin embargo, generalmente muy técnicas, pero el lector más perseverante encontrará, con seguridad, que estas pocas, elegidas al azar, son interesantes.

La teoría cinética de los gases y la curva de probabilidad del error

La ley de los gases fue determinada experimentalmente por el físico y químico inglés Robert Boyle (1627-1691), cuya obra más importante lleva el título: *El Químico Escéptico: o Dudas y Paradojas Químico-Físicas concernientes a los experimentos mediante los cuales vulgares Espagíricos tratan de demostrar que la Sal, el Azufre y el Mercurio son los verdaderos Principios de las Cosas*. Su ley de los gases establece que la presión de un gas es inversamente proporcional a su volumen. Así: Presión × Volumen = Constante. Pero cualquier volumen de un gas está constituido por un enorme número de moléculas en movimiento, cada una de las cuales posee una velocidad proporcional a su energía. Naturalmente, las colisiones moleculares tienen lugar en gran número, a cada instante. Se ha estimado que en "el aire ordinario cada molécula choca con alguna otra cerca de 3.000 millones de

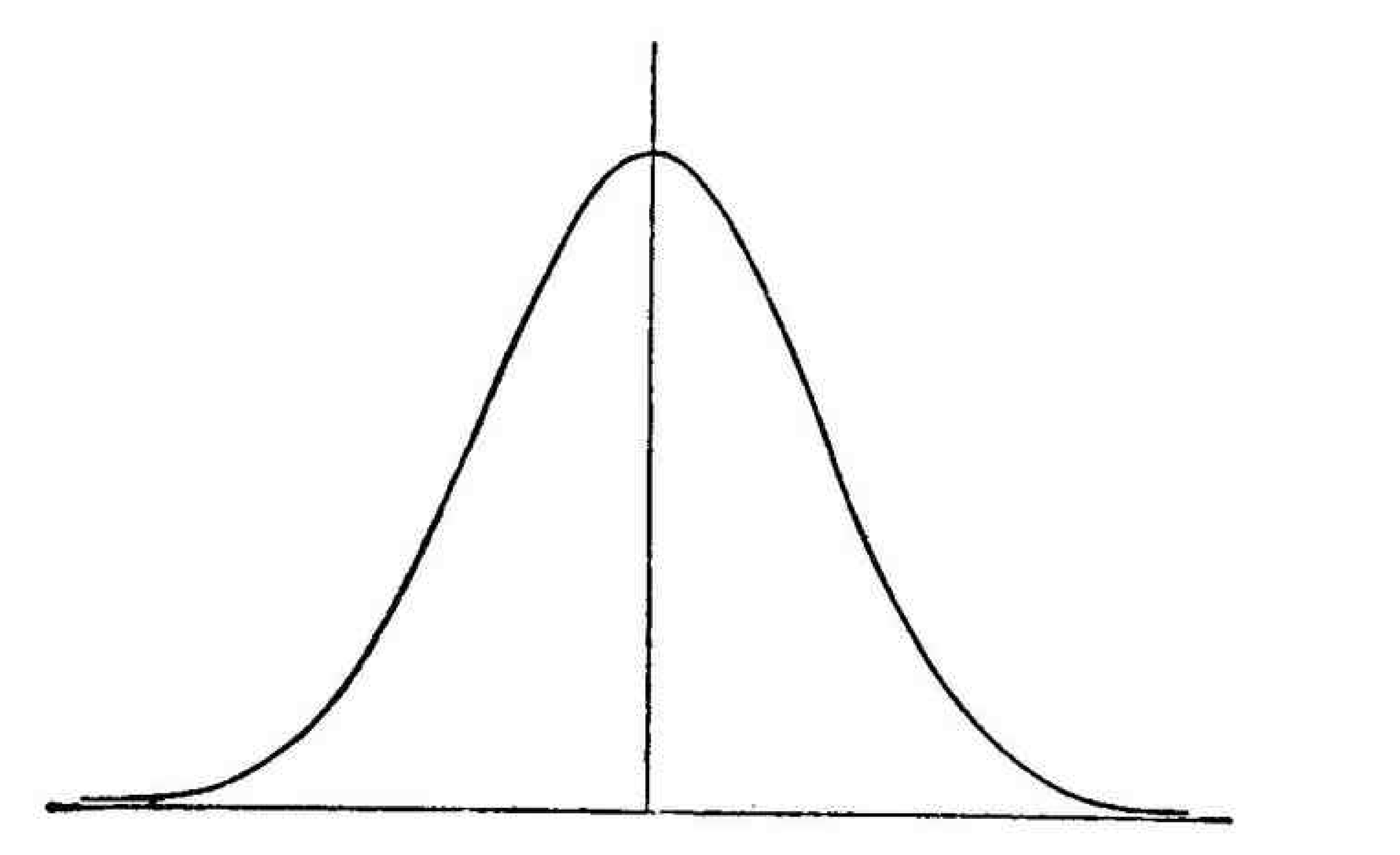


Fig. 80. Curva normal de la probabilidad.

veces por segundo y que recorre una distancia media de cerca de $\frac{1}{160.000}$ pulgadas, unas 0,16 milésimas de milímetro entre dos choques sucesivos."*

Suponiendo que estos choques se produzcan con perfec-

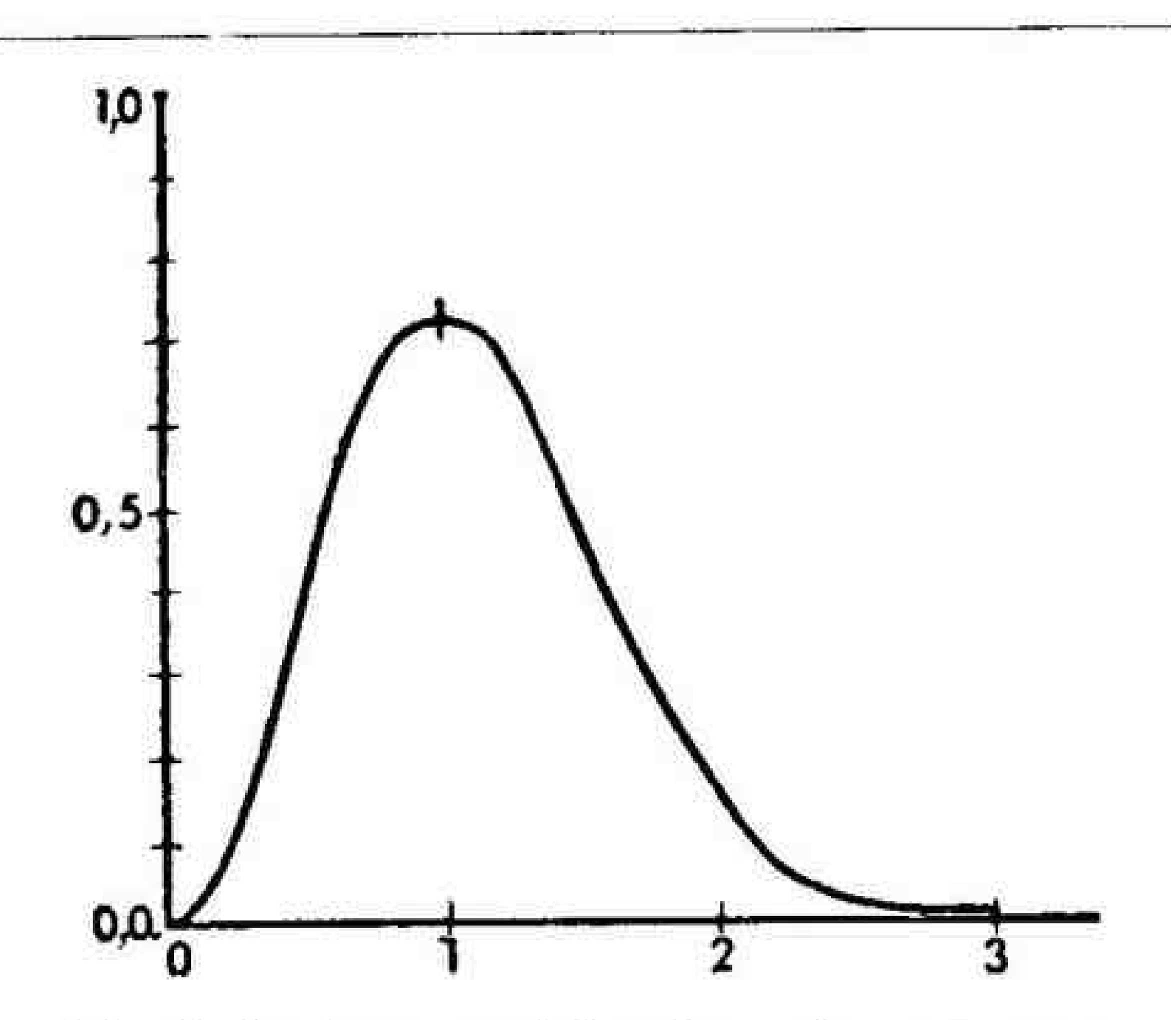


Fig. 81. Velocidad de las moléculas de un gas.

ta elasticidad, es decir, sin pérdida de energía, puede deducirse que en cualquier instante habrá algunas moléculas moviéndose en todas direcciones y con todas velocidades. Matemáticamente demostraron, primero Clausius y posteriormente Maxwell y Boltzmann que $P = \frac{1}{3}nmV^2$, donde P es la presión, n, el número de moléculas en la unidad de volumen, m, la masa, de cada una de ellas y V^2, el valor promedio del cuadrado de la velocidad.

Al problema de la distribución de las velocidades entre las moléculas, Maxwell aplicó la ley del error de Gauss (de mucha importancia en todas las ramas de la investigación científica) y que se deduce de la teoría de la probabilidad.

* Sir James Jeans, *The Universe Around Us* (New York: Macmillan, 1929).

La curva normal del error (véase la fig. 80) puede obtenerse mediante el desarrollo del binomio $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^n$ cuando $n \rightarrow \infty$. Esta curva demuestra que en la observación ordina-

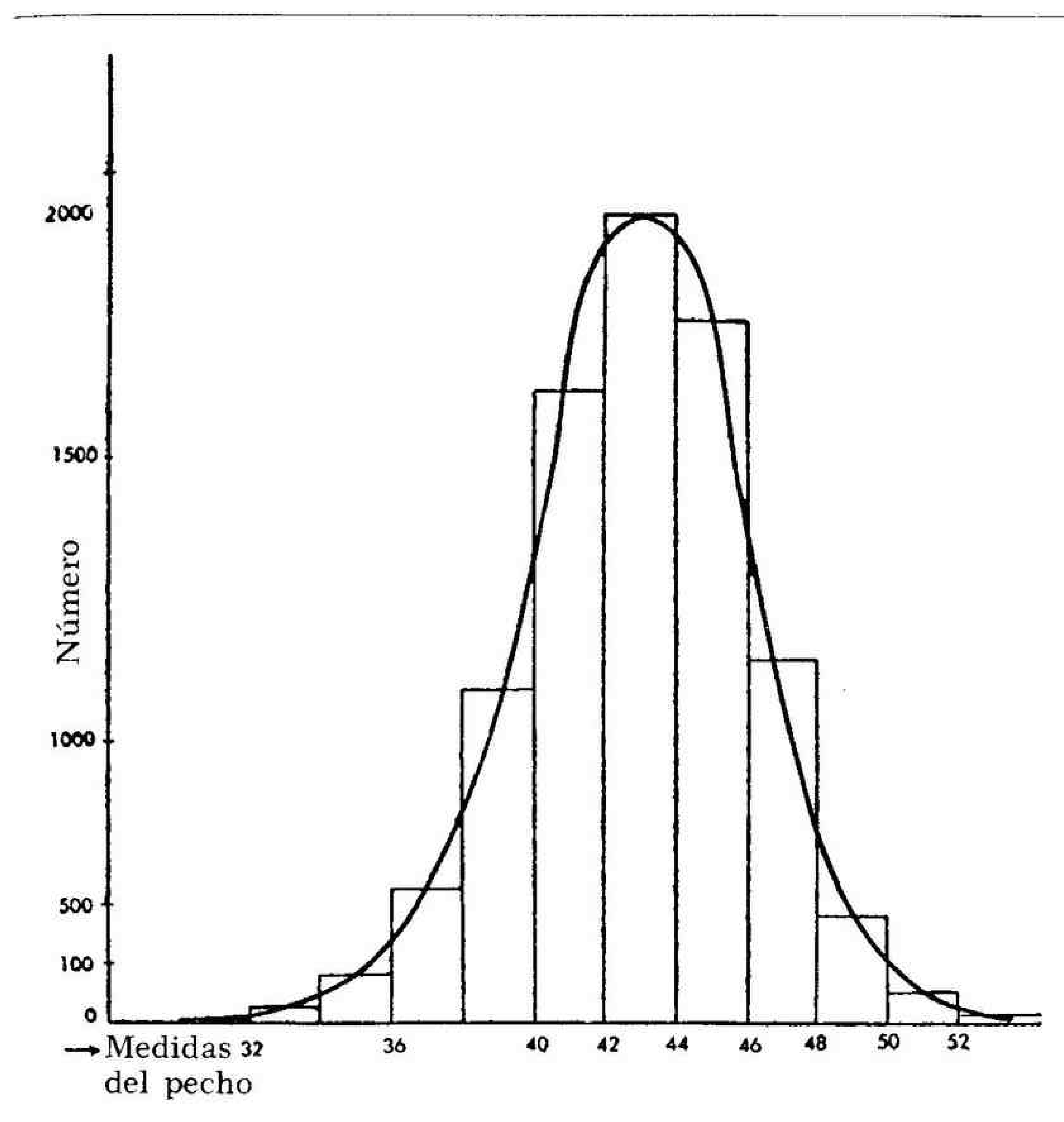


Fig. 82. Esta curva de distribución indica las medidas de los perímetros torácicas de soldados escoceses. Incidentalmente sirve también para describir fenómenos tan variados como los siguientes: 1. Distribución de las edades de los jubilados de una gran empresa. 2. Jugadas en la ruleta. 3. Distribución de los impactos en el tiro al blanco.

ria, los pequeños errores tienen lugar con mayor frecuencia que los grandes.

"La teoría (cinética) demuestra que las moléculas sometidas al riesgo de chocar pueden dividirse en dos grupos, cada uno de los cuales se mueve con cierta variación de velocidad, en la forma ilustrada en el diagrama"* (véase la fig. 81). La semejanza de esta curva con la curva normal del error es manifiesta.

"Las abscisas miden las velocidades y las ordenadas el número de moléculas que se mueven a esa velocidad. Se toma como unidad la velocidad más probable. Se verá que el número de moléculas que se mueven con una velocidad sólo tres veces mayor que la más probable, es casi insignificante. Pueden dibujarse curvas análogas para representar la distribución de los tiros en un blanco, o de los errores en una medición física, o de los hombres agrupados de acuerdo a su estatura o peso, longevidad o sus capacidades reveladas por un examen..."**

La estadística en la antropología

El astrónomo belga, L. A. J. Quételet (1796-1874) demostró que la teoría de la probabilidad podría también aplicarse a los problemas humanos. Así, la misma distribución se encuentra en las jugadas a la ruleta que en la de las balas alrededor del centro de un blanco, en la medida del perímetro torácico de los soldados escoceses o en las velocidades de las moléculas de un gas.***

* Sir William Dampier, *A History of Science and its Relations with Philosophy and Religion* (New York: Macmillan, 1936).
** Sir William Dampier, *op. cit.*
*** *Ibid.*

La estadística y acontecimientos pasados*

Uno de los problemas más antiguos en probabilidad se refiere a la disminución gradual de la probabilidad de un acontecimiento pasado a medida que aumenta la duración de la tradición por la cual está establecido. Quizá la solución más famosa de ello es la respuesta dada por Craig en su *Theologiae Christianae Principia Mathematica*, publicada en 1699. Demuestra en ella que los escépticos de cualquier historia varían en la razón duplicada de los tiempos tomados desde el comienzo de la historia de una manera tal que ha sido descrita como una clase de parodia de la obra *Principia* de Newton. «Craig», dice Todhunter, «llegó a la conclusión de que la fe en el Evangelio, en todo lo que dependiera de la tradición oral, expiró allá por el año 880, y mientras dependiera de la tradición escrita, expiraría por el año 3150. ¡Peterson, adoptando una ley de disminución diferente, llegó a la conclusión de que esa fe terminaría en 1789!»

En el *Budget of Paradoxes*, De Morgan cita a Lee, el orientalista de Cambridge, al efecto de que los escritores mahometanos, en respuesta al argumento de que el Corán no tiene la evidencia proveniente de los milagros cristianos, afirman que la evidencia de los milagros cristianos se debilita diariamente y al fin deberá llegar el tiempo en que dejarán de proporcionar la seguridad de que hubo milagros y de ahí la necesidad de otro profeta y otros milagros.

* John Maynard Keynes, *A Treatise on Probability* (New York and London: Macmillan, 1921) capítulo XVI, página 184

La estadística de las muertes provocadas por incursiones aéreas

El profesor J. B. S. Haldane, en una comunicación a *Nature* (octubre 29 de 1938), analizó las matemáticas de la protección contra incursiones aéreas. Sería muy difícil encontrar un comentario más audaz sobre la sociedad contemporánea, aun cuando su tono y propósito son fríamente desapasionados y puramente científicos en su esencia:

"En vista de las discusiones que se suscitan sobre este tema, parece conveniente tener alguna medida cuantitativa acerca del grado de protección que depara un refugio antiaéreo dado. A fin de limitar el problema, podemos considerar solamente los riesgos de muerte y concretarnos a bombas altamente explosivas. Las bombas incendiarias han demostrado constituir un peligro insignificante para la vida, en España, y las de gas son también insignificantes salvo para los niños de corta edad y para aquellos a quienes no ajusta bien la máscara antigás.

"Considérese un tipo determinado de bomba, digamos por ejemplo, de 250 kg que se ha utilizado comúnmente en las zonas centrales de las ciudades españolas, y un hombre en una situación dada, ya sea en la calle o en un refugio. Sea n el número de bombas que se espera caerá en su vecindad (por ejemplo 1 kilómetro cuadrado) durante toda la guerra. La distribución de bombas sobre esta superficie la consideraremos uniforme ya que la puntería es muy deficiente cuando se bombardean ciudades. Sea p la probabilidad de que una sola bomba, que caiga en el punto de coordenadas (x, y) de esta superficie, lo mate. Entonces, la probabilidad de que sea muerto en el curso de la guerra es: $P = \int (n/A) p dx dy$, tomando la integral sobre toda la vecindad de área A.

"Los valores de n y p serán, por supuesto, diferentes para cada tipo de bomba y habrán de sumarse las distintas expresiones que se obtengan. Además, el hombre estará en distintos lugares durante la guerra y, de este modo, se hace necesaria una nueva suma. Finalmente, debe sumarse P para toda la nación.

"El sistema de evacuación tiene por finalidad reducir el valor de n aun cuando pueda aumentar el de p, como cuando un niño es evacuado de una casa bastante sólida para llevarlo a una endeble casita de campo. La tendencia a la dispersión dentro de una zona peligrosa, no reduce, por supuesto, ni a n ni a p. Garantiza, simplemente, que una sola bomba no matará a un gran número de personas, mientras que aumenta la probabilidad de que cualquier bomba mate, por lo menos, a una persona. Es probable salvar unas pocas vidas compensando los números de heridos a ser tratados en diferentes hospitales; y el efecto sicológico de tener 20 muertos en cada una de las 10 zonas puede ser menor que el de 200 en una sola zona. Pero como, en realidad, ello puede aumentar el valor medio de p, al alentar a las personas a permanecer en un número de construcciones endebles antes que en un edificio sólido es, al menos, tan probable aumentar el número total de muertes como el disminuirlas. El argumento de que cierta cantidad de personas no debe ser concentrada en un lugar a fin de que una sola bomba no mate a centenares de ellas, es claramente falso cuando se aplica a una guerra en la que el número de muertes totales será elevado. Sin embargo, es cierto que en un pequeño número de hombres-clave, cada uno de ellos puede reemplazar a otro, éstos no deben ser agrupados juntos."

NOTAS DE ESTE CAPÍTULO

1. A. Conan Doyle, *The Return of Sherlock Holmes*, «The Adventure of the Dancing Men", página 233.
2. También podría ser que ciertas estructuras de oraciones que *parecen* proposiciones no son *ni* verdaderas ni falsas, sino sin sentido. Hay, por ejemplo, funciones proporcionales tales como "*x* es una *y*" o proposiciones que carecen totalmente de sentido como "Un 'snack' es un boojum." Pero ninguno de estos dos tipos nos interesa aquí, página 237.
3. La siguiente paradoja, que surge del principio de razón suficiente, es citada por Keynes del matemático alemán Von Kries (Keynes, *A Treatise on Probability*, London, Macmillan, 1921). Supongamos que conocemos que el volumen específico de una sustancia está comprendido entre 1 y 3, aun cuando no conocemos su valor exacto. El principio de indiferencia nos justificaría si dijéramos que el volumen específico está, entre 1 y 2 o entre 2 y 3, con igual probabilidad. La densidad específica de una sustancia es la recíproca de su volumen específico. Si el volumen específico es *V*, la densidad específica es 1/*V*, de manera que sabemos que la densidad específica debe estar comprendida entre 1 y 1/3. Nuevamente, por el principio de razón insuficiente, es tan probable que quede entre 1 y 2/3 como entre 2/3 y 1/3; pero como el volumen específico es una función de la densidad específica, si esta última está comprendida entre 1 y 2/3 la anterior queda entre 1 y $1\frac{1}{2}$ y en cambio si aquélla está comprendida entre 2/3 y 1/3, la anterior lo estará entre $1\frac{1}{2}$ y 3. De ahí se deduce que es tan probable que el volumen específico esté comprendido entre 1 y $1\frac{1}{2}$ como entre $1\frac{1}{2}$ y 3, lo cual es contrario a nuestra primera suposición de que era tan probable que estuviera comprendido entre 1 y 2 como entre 2 y 3, página 239.
4. Dantzig, *Number, the Language of Science*, página 241.
5. Charles S. Peirce, *Chance, Love and Logic*, página 247.
6. Para un análisis brillante y que ayuda a recordar admirablemente éste y otros problemas de probabilidad, véase Cohen y Nagel, *An Introduction to Logic and Scientific Method*, New York: Harcourt Brace, 1936, página 247.
7. Véase el apéndice a este capítulo, página 250.
8. Como nota de interés diremos que hay 36.568 maneras distintas de ordenar las letras de la palabra "Mississippi", página 252.
9. El lector no deberá confundirse por el hecho de que *BN* y *NB* se representen simplemente por *2BN*. *2BN* significa sencillamente dos extracciones en cada una de las cuales hay una bola negra y una blanca, sin tener en cuenta el orden en que aparecen, página 260.
10. Sin molestarse para recordar la fórmula general, mediante el famoso triángulo de Pascal, uno puede determinar inmediatamente los coeficientes de cualquier desarrollo binomial:

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Examinando esta disposición, el lector podrá deducir cómo se forma cada nueva hilera, página 261.

11. Laplace, *Essai Philosophique sur la Probabilité*, página 264.
12. Citado de C. G. Darwin, *Presidential Address to the British Association*, 1938, página 268.

VIII. GEOMETRÍA DE LA LÁMINA ELÁSTICA

Se e-s-t-i-r-a.

ANUNCIO PUBLICITARIO

En una época ya pasada, siete puentes atravesaban el sinuoso curso del río Pregel en su paso a través de la pequeña ciudad universitaria alemana de Königsberg. Cuatro de ellos unían las orillas opuestas con la pequeña isla de Kneiphof. Un puente comunicaba Kneiphof con otra isla y los dos restantes unían a ésta con tierra firme. Estos siete puentes del siglo XVIII proporcionaron el material para uno de los más célebres problemas de las matemáticas.

Problemas aparentemente triviales han dado origen al desarrollo de diversas teorías matemáticas. La probabilidad nació del cubilete de dados de los jóvenes nobles de Francia; la geometría de la lámina elástica fue urdida en el apacible ambiente de las tabernas de Königsberg. Sencillos ciudadanos alemanes, no eran jugadores; pero les gustaba disfrutar de sus paseos. En torno a sus jarros de cerveza se preguntaban: "¿Cómo planear el paseo del domingo por la tarde, de modo que se cruce una sola vez cada uno de los siete puentes?"

Repetidos tanteos les llevaron a la convicción de que era

imposible; pero una demostración matemática no debe basarse en creencias, ni en ensayos.

Lejos, en San Petersburgo, el gran Euler tiritaba, rodeado de honores y emolumentos como matemático de la corte de Catalina la Grande. A Euler, nostálgico y hastiado de tanta pompa y protocolo, le llegaron de su patria, de manera algo extraña, noticias de ese problema. Lo resolvió con su extraordinario cacumen; la *Topología* o *Analysis Situs* quedó fundada cuando Euler presentó la solución del problema de los puentes de Königsberg ante la Academia Rusa de San Petersburgo, en el año 1735. Esta célebre memoria demostró que el viaje por los siete puentes, en la forma exigida por el problema, era imposible.

Euler simplificó el problema reemplazando las zonas de tierra (de la fig. 83) por puntos, y los puentes, por líneas que unían estos puntos. Una vez efectuada esta simplificación, ¿puede dibujarse la figura 84 con un trazo continuo del lápiz, sin levantarlo del papel? Porque esto es equivalente a atravesar físicamente los siete puentes en un paseo. Matemáticamente el problema se reduce al de *recorrer un grafo*. Un "grafo", con la acepción que aquí le damos, es simplemente una configuración que consiste en un número finito de puntos llamados vértices y en un número de arcos. Los vértices son los puntos extremos de los arcos y dos arcos cualesquiera carecen de puntos comunes excepto, quizá, vértices.

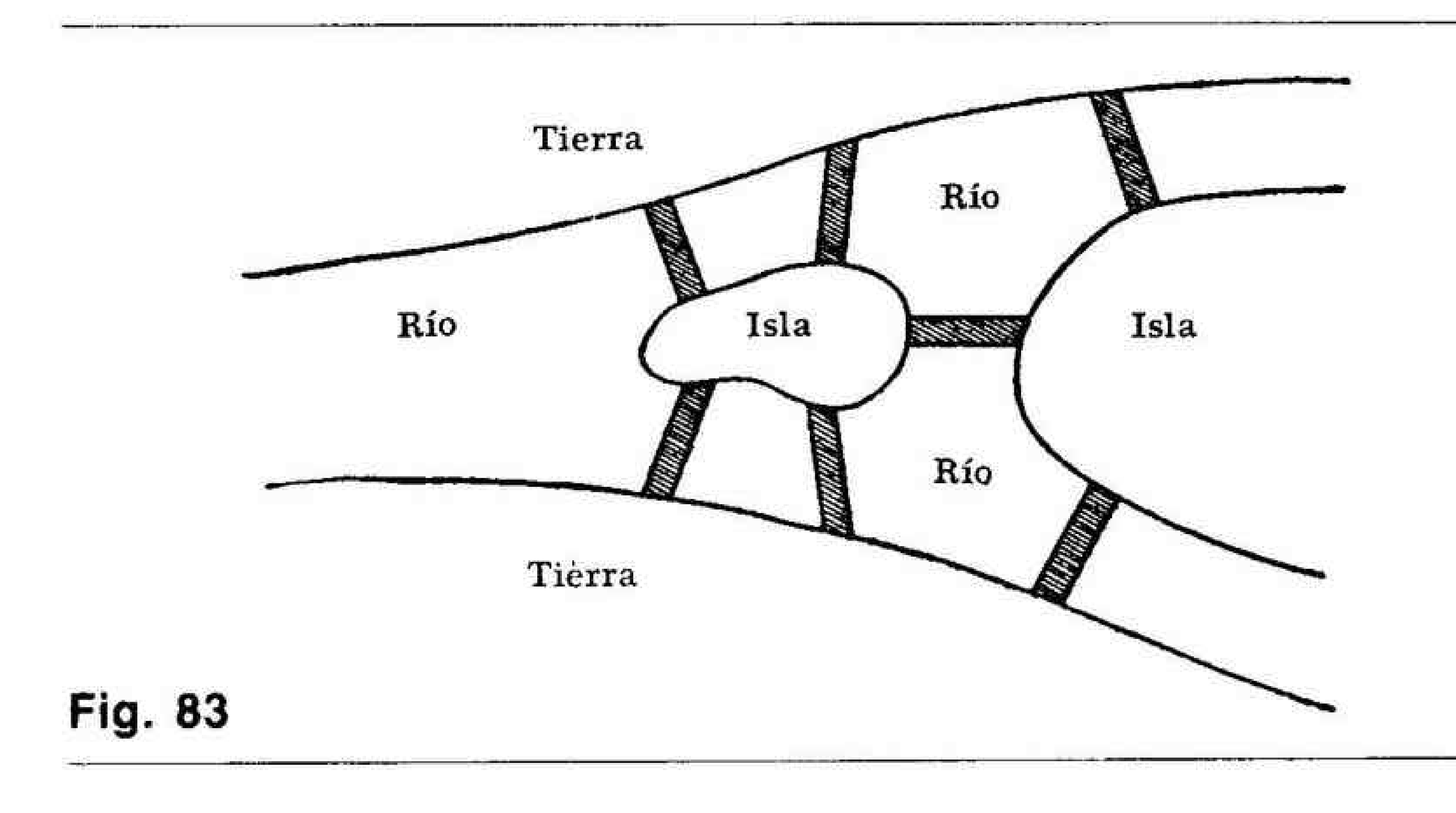


Fig. 83

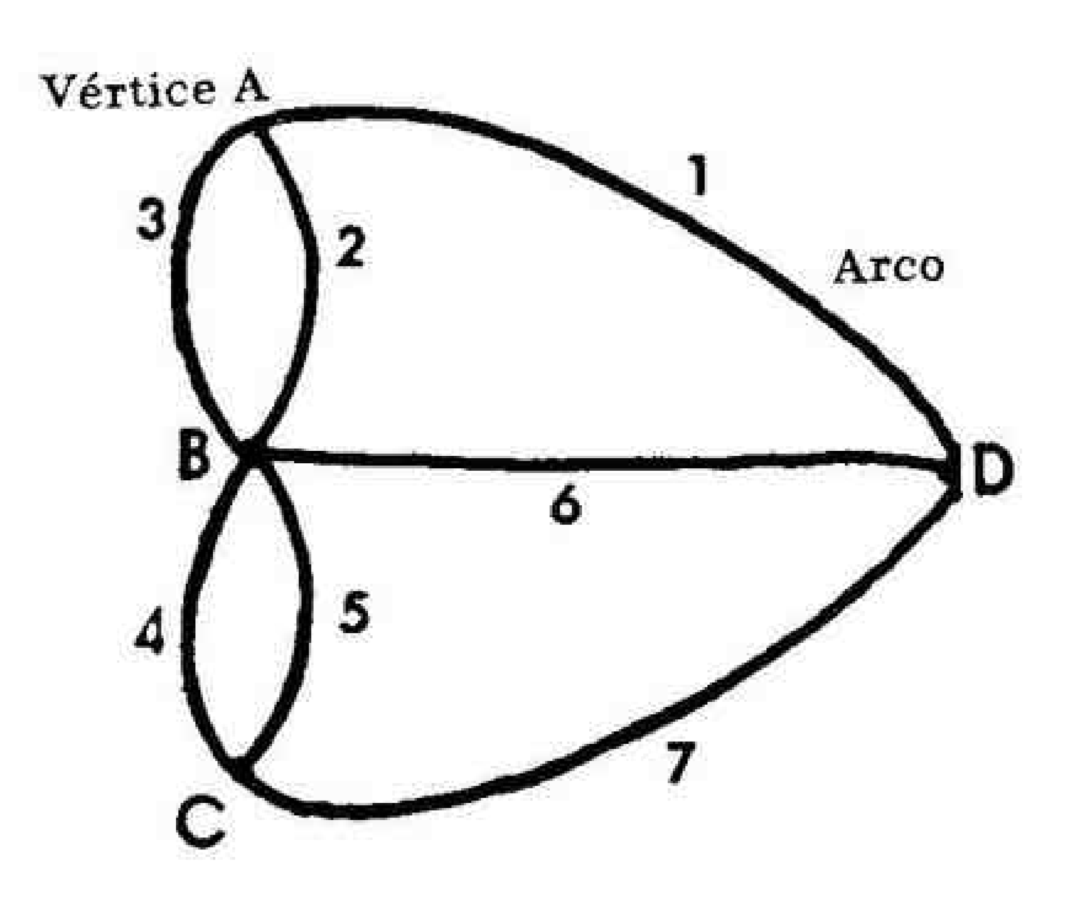


Fig. 84. Una gráfica con cuatro vértices y siete arcos, correspondiente a los puentes de Königsberg.

Un vértice es impar o par, según sea impar o par el número de arcos que a él concurren.

Se *recorre* un "grafo" pasando por todos sus arcos exactamente una vez. Euler descubrió que esto puede hacerse, comenzando y terminando en el mismo punto, si la gráfica sólo contiene vértices pares. Además, descubrió que si la gráfica contiene, a lo sumo, dos vértices *impares*, puede también ser recorrida, pero no es posible volver al punto de partida. En general, si la gráfica contiene $2n$ vértices impares, en la que n es cualquier número entero, se necesitarán exactamente n rutas distintas para recorrerla[1].

La figura 84 es la gráfica de los siete puentes de Königsberg. Ya que sus cuatro vértices son *impares*, es decir, que cada uno de ellos es el extremo de un número impar de arcos, $2n = 2 \times 2$ y se requieren, por lo tanto, dos rutas para recorrerla; un solo paseo no será suficiente.

Si, como en la figura 85, se dibuja un arco adicional de

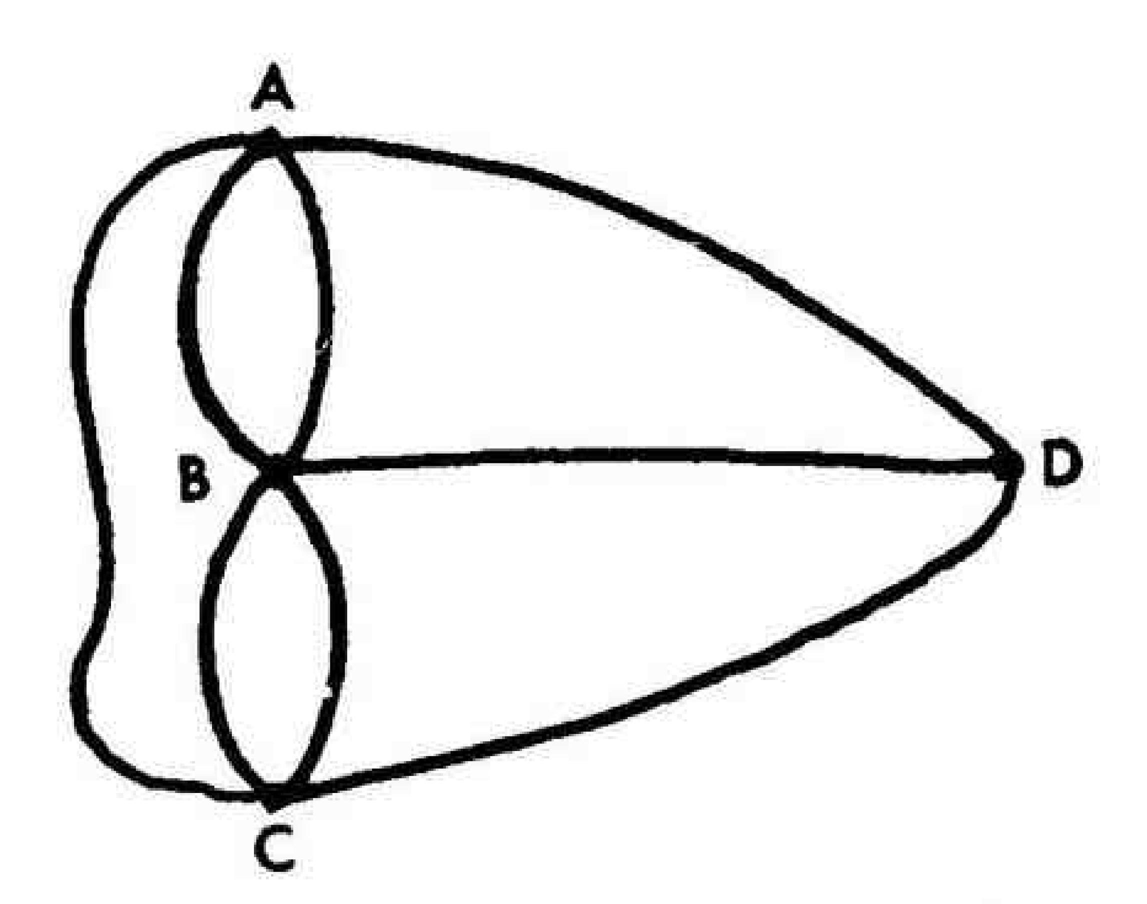


Fig. 85. Una gráfica con cuatro vértices y ocho arcos.

A a *C*, que representa otro puente y se retira el arco *BD*, todos los vértices serán pares: *A*, *B* y *C* del orden 4 y *D* del orden 2 y, en consecuencia, la gráfica podrá ser recorrida con una sola ruta. Si *no* se retira el arco *BD*, el peatón podrá realizar su paseo, cruzar todos los puentes de una sola vez, pero verá que no puede terminarlo en el punto desde donde partió. Así, si sale de *D*, terminará en *B* y viceversa. (Nota: debe iniciar su paseo desde un vértice impar.)

El problema de los siete puentes es representativo de un grupo de otros problemas, algunos de los cuales datan de la más remota antigüedad. Constituyen un ejemplo de cuán difícil es comprender mentalmente las verdaderas propiedades geométricas de las figuras, aun de las más sencillas.

En la historia de la magia y de la superstición, la figura 86 (pág. 281) ha desempeñado un papel importante como talismán contra todas las formas de desgracia. Conocida de los mahometanos y los hindúes, los pitagóricos y los cabalistas, se la grababa frecuentemente en las camitas de los niños para ahuyentar al mal, mientras que, en países más prácticos, se la pintaba en los establos. Es posible recorrer esta estrella, volviendo al punto de partida, con un solo trazo de lápiz.

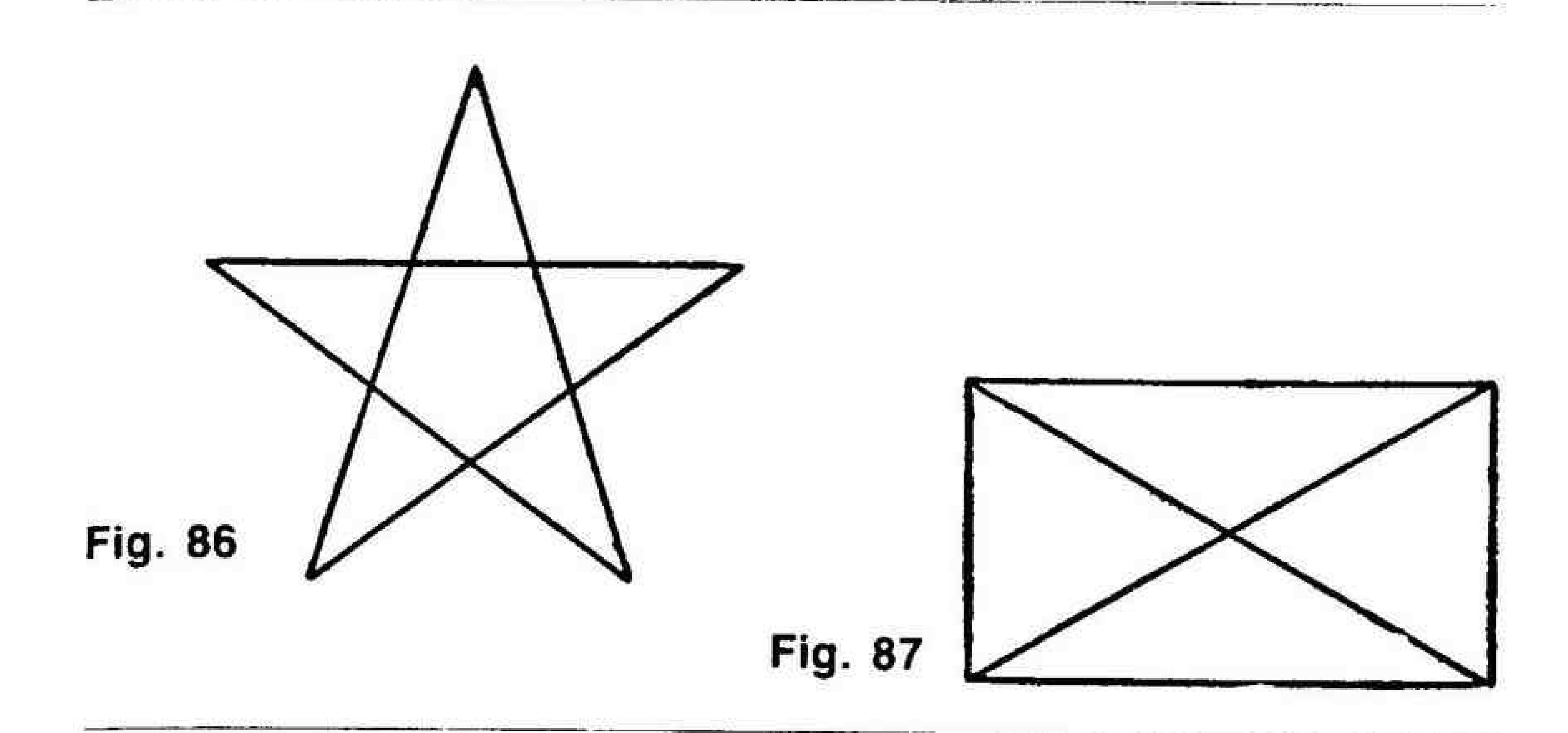


Fig. 86

Fig. 87

La regla de Euler explicar por qué la figura 87 no puede ser recorrida mediante un solo trazo de lápiz, puesto que tiene cinco vértices, cuatro de los cuales son los puntos terminales de tres arcos, en otras palabras, de un orden impar y, por lo tanto, se necesitan *dos* rutas.

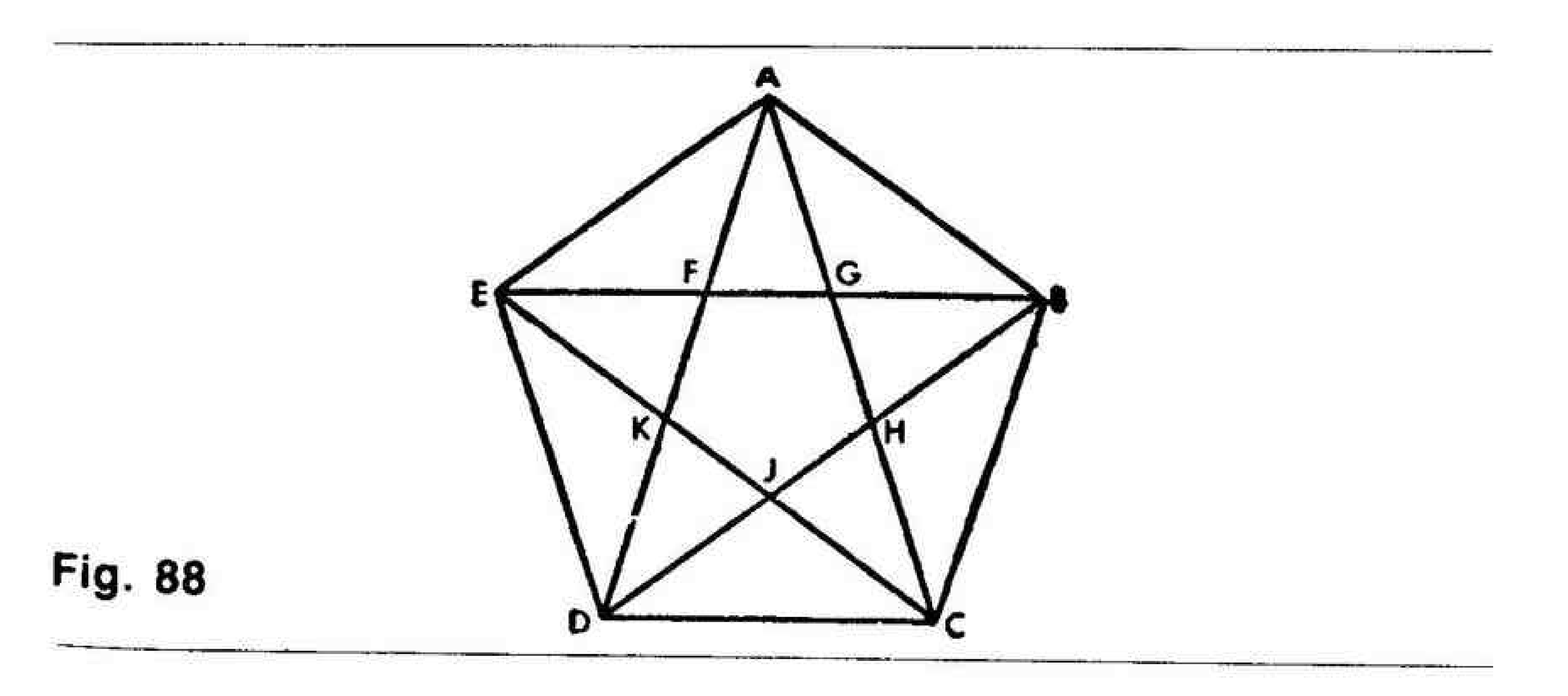


Fig. 88

El pentágono de la figura 88, mucho más complicado en apariencia, puede ser recorrido con un solo viaje. Partiendo del punto *A* el recorrido se haría pasando sucesivamente por los puntos *ABCDEFGBHJDKFAGHCJKEA*.

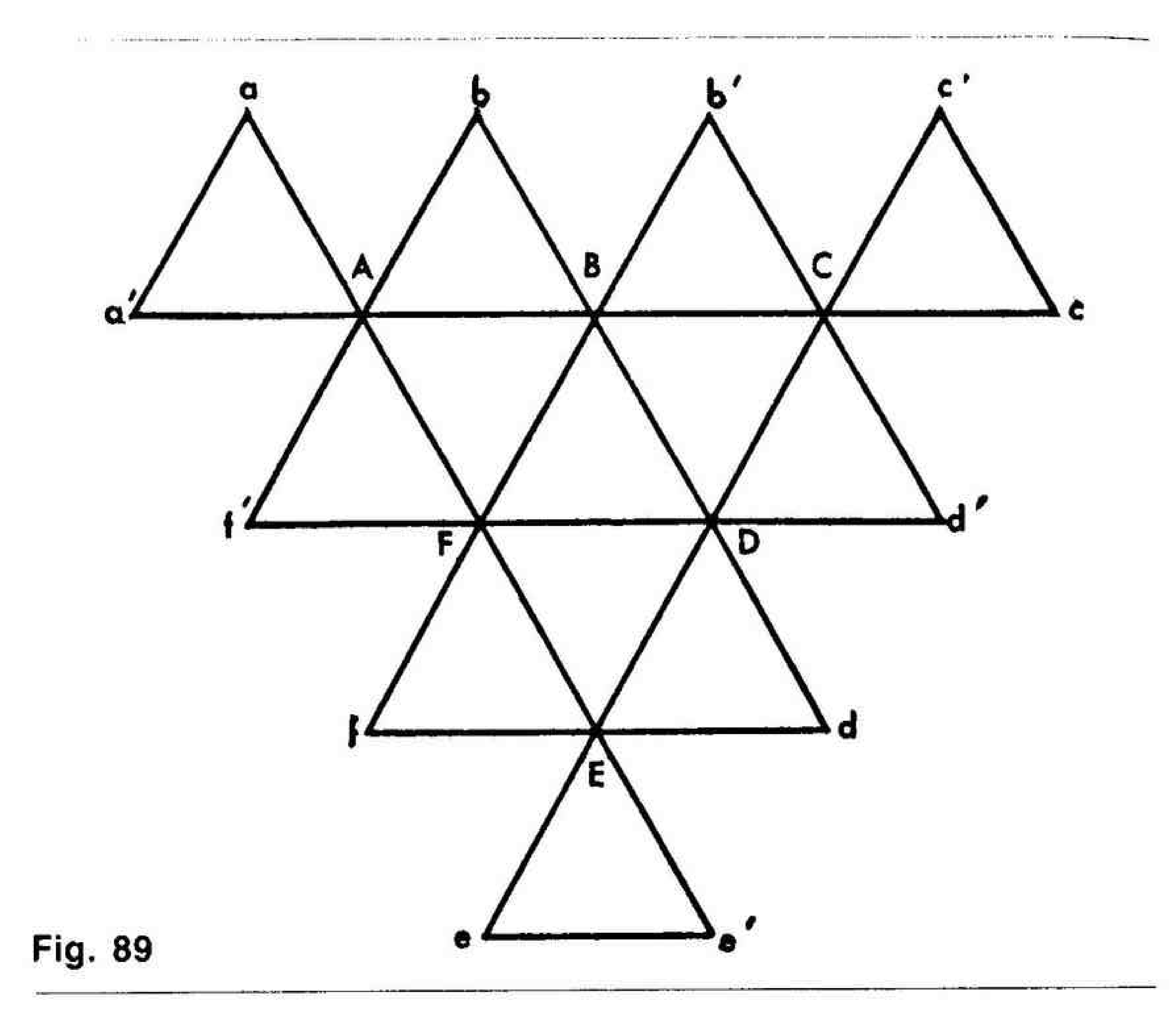


Fig. 89

Aun en el caso de la figura 89 se reduce a un recorrido simple pasando, por ejemplo, por: *ABCcc' CDEee' EFAaa' AbBDdEfFBb' Cd'DFf'A.*

Al abordar el problema de los siete puentes, Euler hizo mucho más que resolver un simple rompecabezas, puesto que reconoció la existencia de ciertas propiedades fundamentales de las figuras geométricas que no dependen para nada del tamaño o de la forma. Estas propiedades son funciones únicamente de la posición general de las líneas y puntos de una figura. Por ejemplo, sobre una línea *ABC*, el hecho de que el punto *B* esté comprendido *entre* los puntos *A* y *C* es tan importante como el de que la línea *ABC* sea recta

o curva, o tenga cierta longitud. Nuevamente (figura 90) cuando un punto interior de un triángulo se une con un punto exterior, la línea que determinan debe cortar a un lado del triángulo, hecho que es tan importante como el de que los ángulos de un triángulo sumen 180°. El estudio de dichas propiedades, que no quedan afectadas cuando se *deforma* la figura, es lo que constituye la ciencia de la *Topología*. La topología es una geometría del lugar, de la posición (lo que explica su otra denominación de *Analysis Situs*), y que se distingue de las geometrías métricas de Euclides, Lobachevsky, Riemann, etc., que tratan de longitudes y ángulos.

En topología nunca preguntamos "¿Qué longitud?", o "¿A qué distancia?" o "¿De qué magnitud?", sino que inquirimos "¿Dónde?", "¿Entre qué?", "¿Interior o exterior?" Un viajero, en un camino desconocido, no preguntaría, "¿A qué distancia se encuentra la granja de Juan?" si no sabe la dirección, ya que la respuesta: "A siete kilómetros", nada le significaría. Es más probable que pregunte "¿Cómo se va a la granja de Juan?" y entonces una respuesta como: "Siga este camino

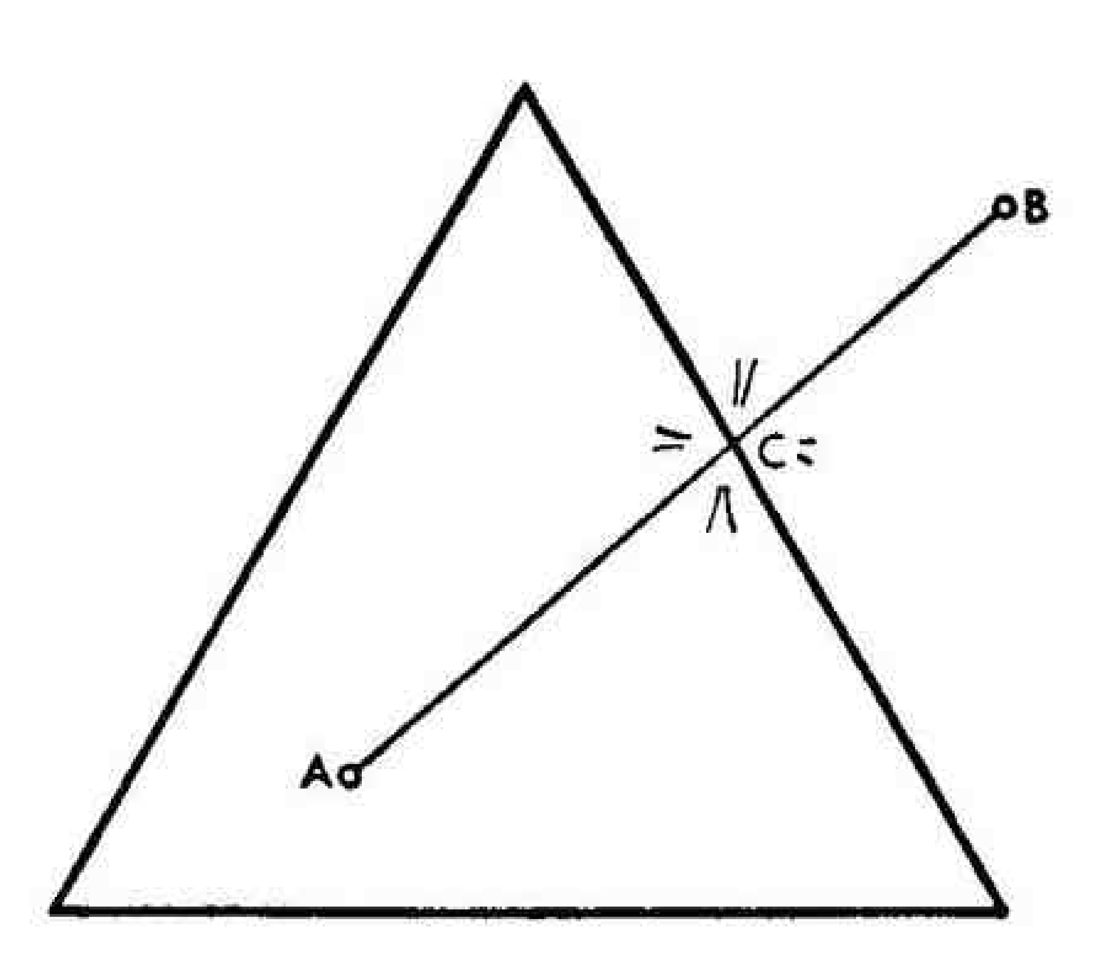


Fig. 90. La línea que une el punto interior *A* con el punto exterior *B corta* al triángulo en *C*. No importa cómo ha sido trazada la línea: debe cortar al triángulo en algún punto.

hasta llegar a una bifurcación y luego doble hacia la derecha", le dirá con precisión cuanto necesita saber. Como esta respuesta nada dice de distancias y no describe si el camino es recto o curvo, podrá parecer no matemática y sin embargo, tiene la misma relación, con respecto a la primera pregunta, que la topología con relación a la geometría métrica.

La topología es una geometría *no cuantitativa*. Sus proposiciones serían tan verdaderas en figuras hechas de goma como en las figuras rígidas que se encuentran en la geometría métrica. Por esa razón ha sido denominada, en forma pintoresca, *Geometría de la lámina elástica*.

La geometría era una tema muy de moda en el siglo XIX. El siglo XVIII se había dedicado al cálculo y al análisis. El siglo XIX, en gran parte, perteneció a los geómetras. Era inevitable, entonces, que la topología, que estaba en su infancia, recibiera su parte de atención.

El primer tratado sistemático apareció en 1847, la obra del matemático alemán Listing, intitulada *Vorstudien zur Topologie*. Hoy esta materia, si bien se ocupa de lo mismo que cuando Euler la inventó, ha adquirido una terminología más abstrusa, como cuadra a una ciencia ya desarrollada. Se la define ahora como el estudio de las propiedades de los espacios, o sus configuraciones, invariantes bajo transformaciones bicontinuas y biyectivas; sigue siendo el estudio de la posición y relación de las partes de un figura con respecto a otra sin tener en cuenta la forma o el tamaño. En realidad, aunque la topología fue destetada con puentes, hoy se alimenta con buñuelos, así como con otros objetos más curiosos y menos digeribles.

Aun cuando sólo se trate de una ojeada a uno o dos de los teoremas de esta caprichosa rama de las matemáticas, se requiere la introducción de una nueva terminología.

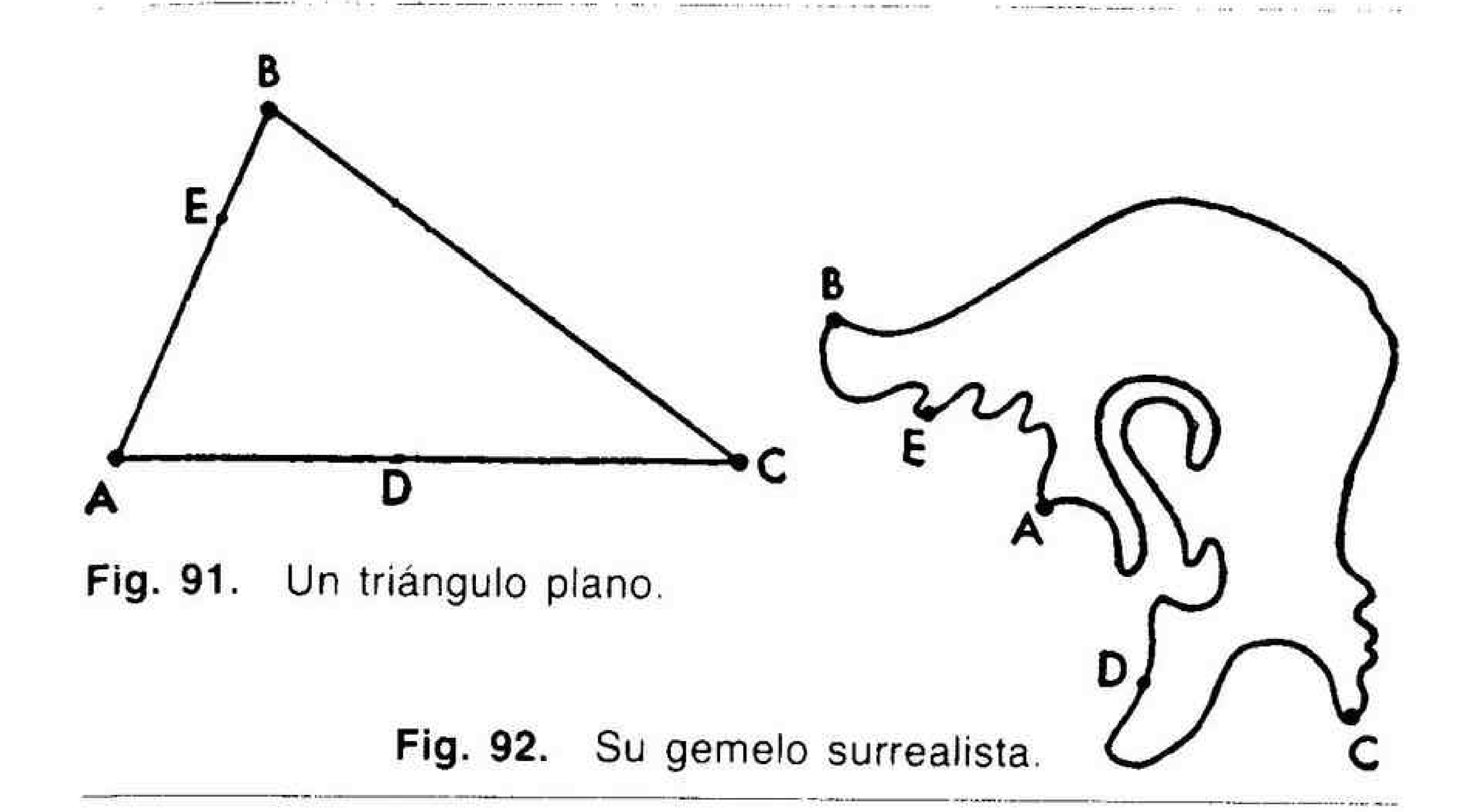


Fig. 91. Un triángulo plano.

Fig. 92. Su gemelo surrealista.

Poincaré señaló que las proposiciones de la topología tienen un rasgo característico: "Seguirían siendo ciertas si las figuras fuesen copiadas por un dibujante inexperto, que alterase groseramente todas las proporciones y reemplazara las líneas rectas por líneas más o menos sinuosas[2]". En términos matemáticos, los teoremas no se alteran mediante una transformación bicontinua punto por punto. La figura 91 es un ejemplo de un triángulo plano trazado por un dibujante experto, la figura 92 representa su distorsionado gemelo surrealista. Sin embargo, topológicamente, la figura 92 es una copia perfecta de la figura 91. Las líneas rectas son curvas, los ángulos están cambiados y distorsionados y las longitudes de los lados, alteradas; pero subsisten propiedades geométricas comunes a ambas figuras. Estas propiedades, que no han sido afectadas por la deformación, son llamadas *invariantes*[3].

En la figura 91, el punto *D* está situado entre los puntos *A* y *C* y el *E* entre *A* y *B*. En la figura 92 se mantiene ese orden. El *orden* de los puntos, es, por lo tanto, invariante bajo la *transformación* que produjo esa deformación. La figura 91

pudo haber sido transformada de alguna otra manera. Si hubiese sido recortada de una lámina de goma fina y ese triángulo hubiese sido retorcido, estirado o deformado de todas las maneras posibles, sin romperlo, el orden de sus puntos continuaría siendo invariante.

Los invariantes de los cuerpos rígidos, en condiciones de movimiento ordinario, son aún más familiares, pero forman parte de nuestras vidas hasta tal punto que jamás reflexionamos sobre ellos. Sin embargo, nuestra existencia sería completamente inconcebible sin los mismos. Un cuerpo rígido no sufre cambios en tamaño o forma cuando se mueve. Sus propiedades métricas son invariantes. En términos más sencillos, el movimiento no tiene efecto deformante. El sombrero comprado en Londres sigue sentando bien cuando lo transportamos a Nueva York. Una vara de medir tiene la misma longitud tanto si nos encontramos en la cumbre de una montaña como si nos sumergimos en el fondo del mar. Una llave se ajusta a la cerradura, tanto cuando la puerta está cerrada como cuando se encuentra abierta. Un buque parece más pequeño cuando está en el horizonte; pero nadie afirmaría que se contrae a medida que se aleja. Y el sillón del filósofo le sirve lo mismo en cualquier rincón del cuarto, sin tener en cuenta cómo cambia su posición o su filosofía.

Damos por conocidos esos invariantes. Al matemático, sin embargo, las cosas evidentes le resultan claves valiosas y raramente las descarta, como carentes de importancia. Se fija cuidadosamente en que el tamaño y la forma de los cuerpos *rígidos* no son afectados por el movimiento, y afirma, en lenguaje técnico, que las *propiedades métricas de los cuerpos son invariantes bajo la transformación del movimiento*. Se fija después en aquellos cuerpos que *no* son rígidos y que *cambian* de tamaño y forma cuando se mueven, buscando sus invariantes geométricos. La topología se ocupa de estos invariantes y forma con ellos un sistema matemático.

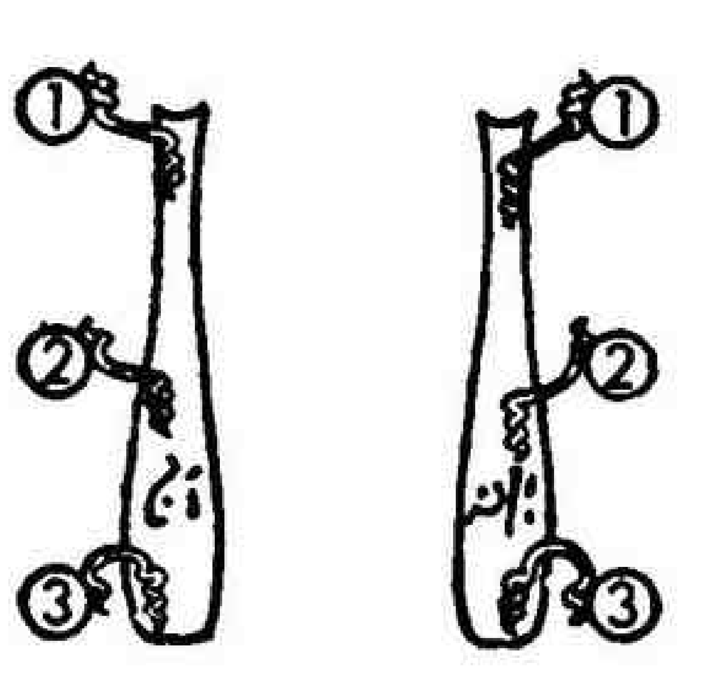


Fig. 93. Únase 1 con 1, 2 con 2 y 3 con 3 mediante líneas que no se corten.

Según una antigua fábula, un califa persa que tenía una hija muy hermosa, estaba tan molesto por el número de sus pretendientes que se vio obligado a establecer pruebas de selección a los efectos de determinar a los finalistas. A los aspirantes de la mano de su hija se les planteó un problema (fig. 93), que consistía en unir los números correspondientes de las figuras simétricas, mediante líneas que no se corten.

Eso era sencillo. Pero no obstante, la hija del califa no fue ganada tan fácilmente, puesto que su padre insistió, además, en que los aspirantes sobrevivientes uniesen los números correspondientes de la figura 94.

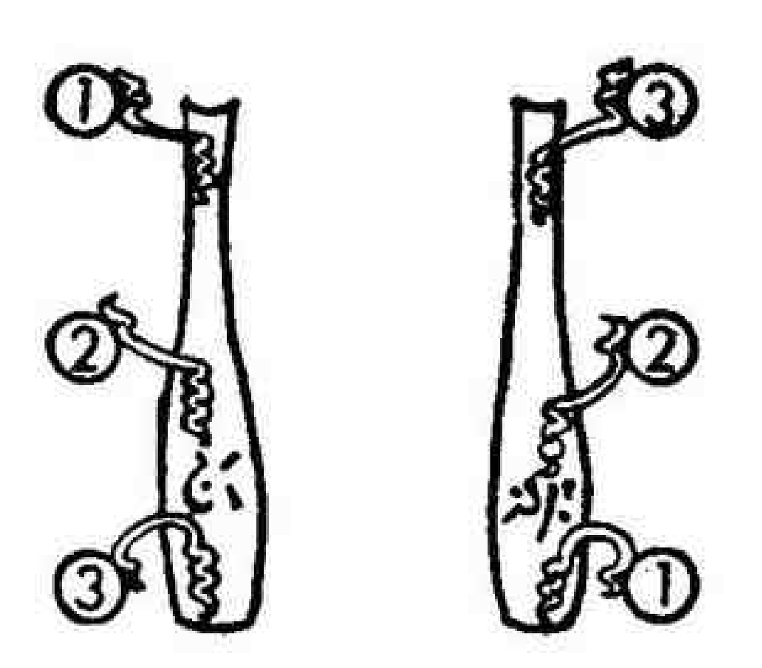


Fig. 94. Trátese de unir dos números correspondientes por medio de rectas que no se corten.

A menos que el califa cediera, podemos suponer que su hija murió solterona, por cuanto este problema no puede ser resuelto. Pueden trazarse dos líneas que unan dos números cualesquiera correspondientes, pero no puede trazarse la tercera sin cruzar a una de las otras dos. Una vez más, vemos por qué el matemático nunca descarta lo evidente. El problema de la figura 93 es fácil. El de la figura 94 parece igualmente fácil y sin embargo es realmente imposible. ¿En qué aspectos esenciales difieren ambos?

Ya a comienzos del siglo XIX el físico Kirchhoff reconoció la importancia de las investigaciones en topología, a fin de contribuir a la solución de los problemas relacionados con la ramificación y el entrelazamiento de los alambres y otros conductores de corriente eléctrica. Y, aunque parezca muy extraño, muchos efectos importantes en la física han sido hallados exactamente análogos a las relaciones espaciales expuestas en el problema del califa.

El primer paso real en el ataque sistemático a todos esos problemas, fue dado en el siglo XIX por el matemático francés Jordan. Su teorema es tan fundamental e importante para la topología, como el teorema de Pitágoras lo es para la geometría métrica. No se parece, en modo alguno, a los teoremas matemáticos hasta ahora enunciados. Dice simplemente que: *"Toda curva cerrada en el plano, que no se corta a sí misma, divide al plano en una parte interior y en otra exterior."*

Sin duda alguna que esto produce la impresión de ser, o idiota o maravilloso. ¿Habrán trabajado los matemáticos durante siglos, para producir semejante cosa? Pero el teorema de Jordan sólo *parece* idiota, porque expresado en términos *no* formales, resulta tan evidente que no valdría la pena repetirlo. Pero la verdad es que se trata de un teorema maravilloso, porque es tan simple, tan modesto y al mismo tiempo tan importante.

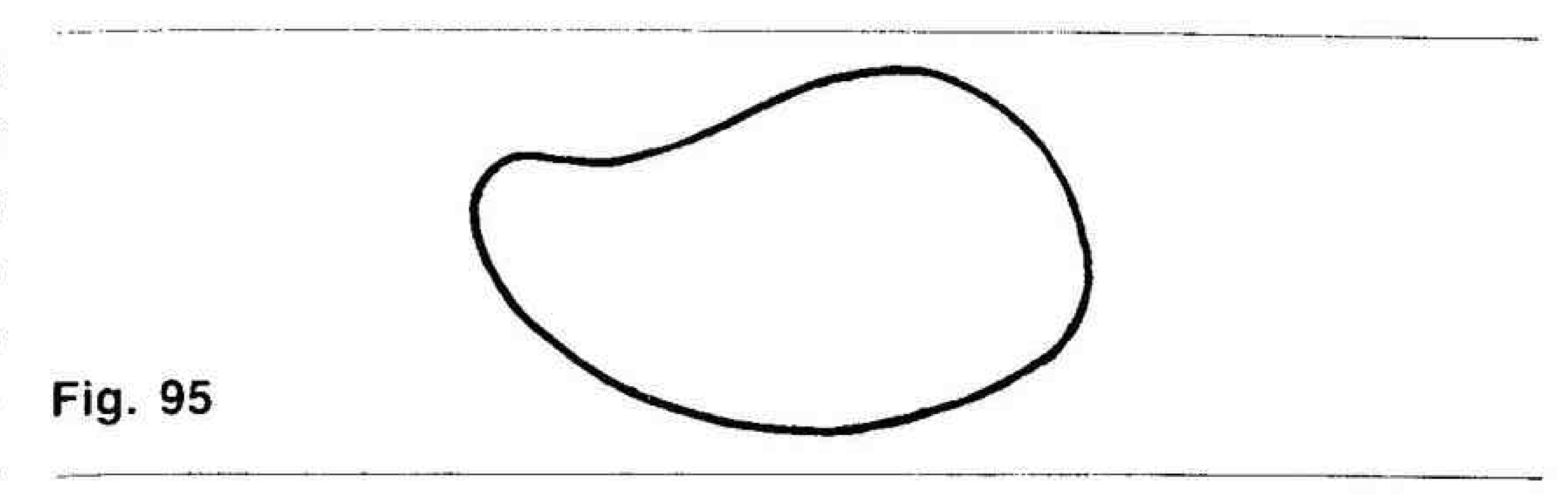


Fig. 95

Una curva que divide al plano en una parte interior y en otra exterior, se denomina *simple*. La figura 95 es una curva simple.

En cambio las de las figuras 96a, 96b y 97 no lo son.

Las curvas de las figuras antes citadas no caen dentro de la definición de Jordan de conexión simple. La primera tiene dos interiores y un exterior; la segunda, varios interiores y un exterior y el área encerrada por la curva más pequeña de la figura 97 es también considerada "exterior" y no interior.

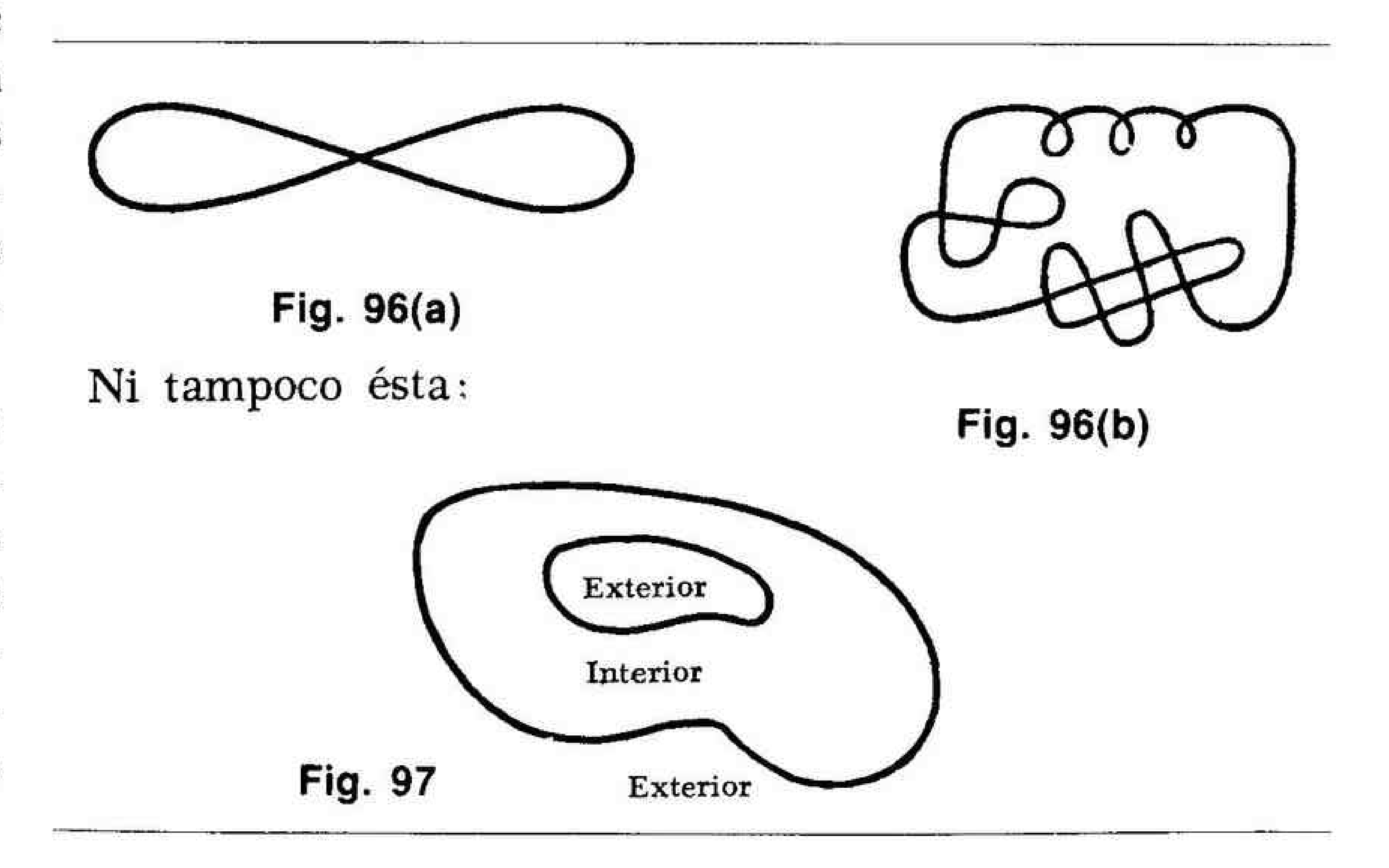


Fig. 96(a)

Ni tampoco ésta:

Fig. 96(b)

Fig. 97

Debe admitirse que el teorema de Jordan parece trivial cuando se aplica a figuras fáciles. Pero no es tan fácil de creer que la curva de la figura 2, a pesar de su apariencia tortuosa y carácter laberíntico, tiene solamente un interior. Por extraño que parezca, dicha curva puede ser considerada como un círculo deformado. Podría verse esto muy fácilmente si estuviese hecha con un trozo de cordel o con una anilla de goma, ya que luego podría ser transformada en un círculo alisando las partes entrelazadas y retorcidas. En geometría métrica se define al círculo como el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto dado; lo cual significa que todos los radios de un círculo son de igual longitud. Pero en topología el concepto de "igual longitud" carece de significado. De este modo se concibe al círculo como a la curva que posee la propiedad fundamental de dividir a todo el plano en una parte interior y en otra exterior. Cualquier curva, por deformada que sea, que tenga esta propiedad, puede ser considerada *equivalente topológica de un círculo*. Se deduce entonces que: *toda curva simple en el plano es topológicamente equivalente a un círculo.*

Cuando el teorema de Jordan se extiende a tres dimensiones, se enuncia diciendo que cualquier *superficie* cerrada, cualquier variedad de dos dimensiones[4], que no se corta a sí misma, divide al espacio en una parte interior y en otra exterior.

Piense usted en el cuarto donde se encuentra. El aire del mismo, todos sus muebles y usted están *adentro*. El resto de todo el Universo, desde el Vesubio hasta el centro de la Tierra, desde la plaza Times Square hasta los anillos de Saturno y más allá, están *afuera*. El gas en un globo está *adentro*, mientras que todo lo demás, en todas las direcciones posibles, incluyendo las esperanzas y los temores que bullen en

MORENO

la cabeza del astronauta, son *exteriores*. El sistema circulatorio humano es una variedad de dos dimensiones difícil de concebir. Sin embargo, es *simplemente conexo*. Divide al espacio en una parte interior y en otra exterior. Interiormente circula el torrente sanguíneo, exteriormente están las innumerables células del cuerpo que se tejen y entretejen con los vasos sanguíneos y, más allá, todo el Universo.

La restricción de que la variedad de dos dimensiones no se debe cortar a sí misma, no trae a la memoria ninguna que lo haga. Sin embargo, dichas variedades son centro de atracción en el Instituto de Estudios Superiores, en Princeton, donde matemáticos eruditos y famosos discurren, en forma extraña, casi como la morsa de Alicia, sobre rosquillas, nudos y buñuelos.

La rosquilla es un objeto de interés, no sólo por sus pro-

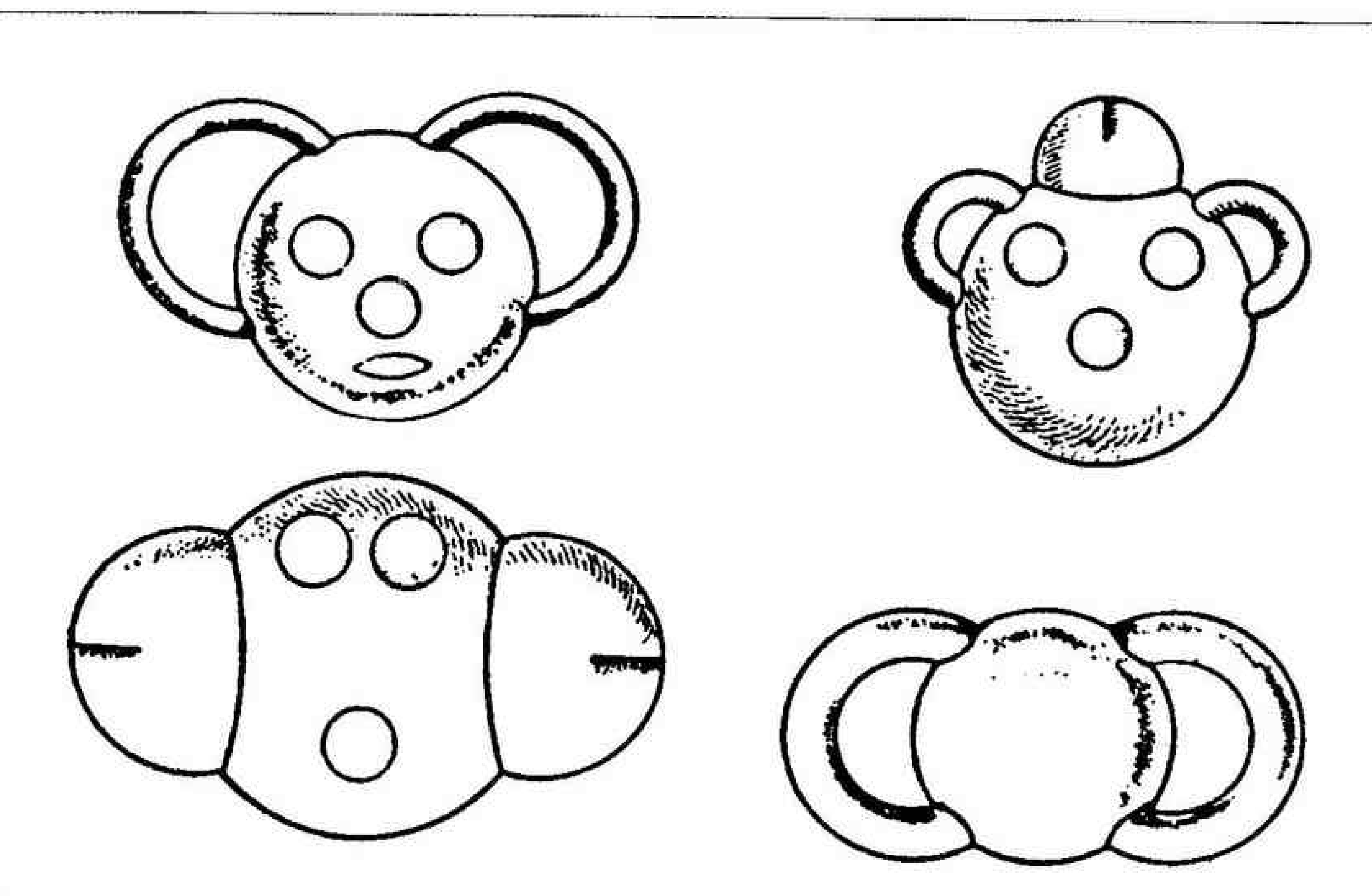


Fig. 97(a, b, c, d). Estas raras figuras no son ni creaciones de Walt Disney ni las impresiones de Picasso sobre el divino género humano, sino tema de serias lucubraciones matemáticas en Princeton.

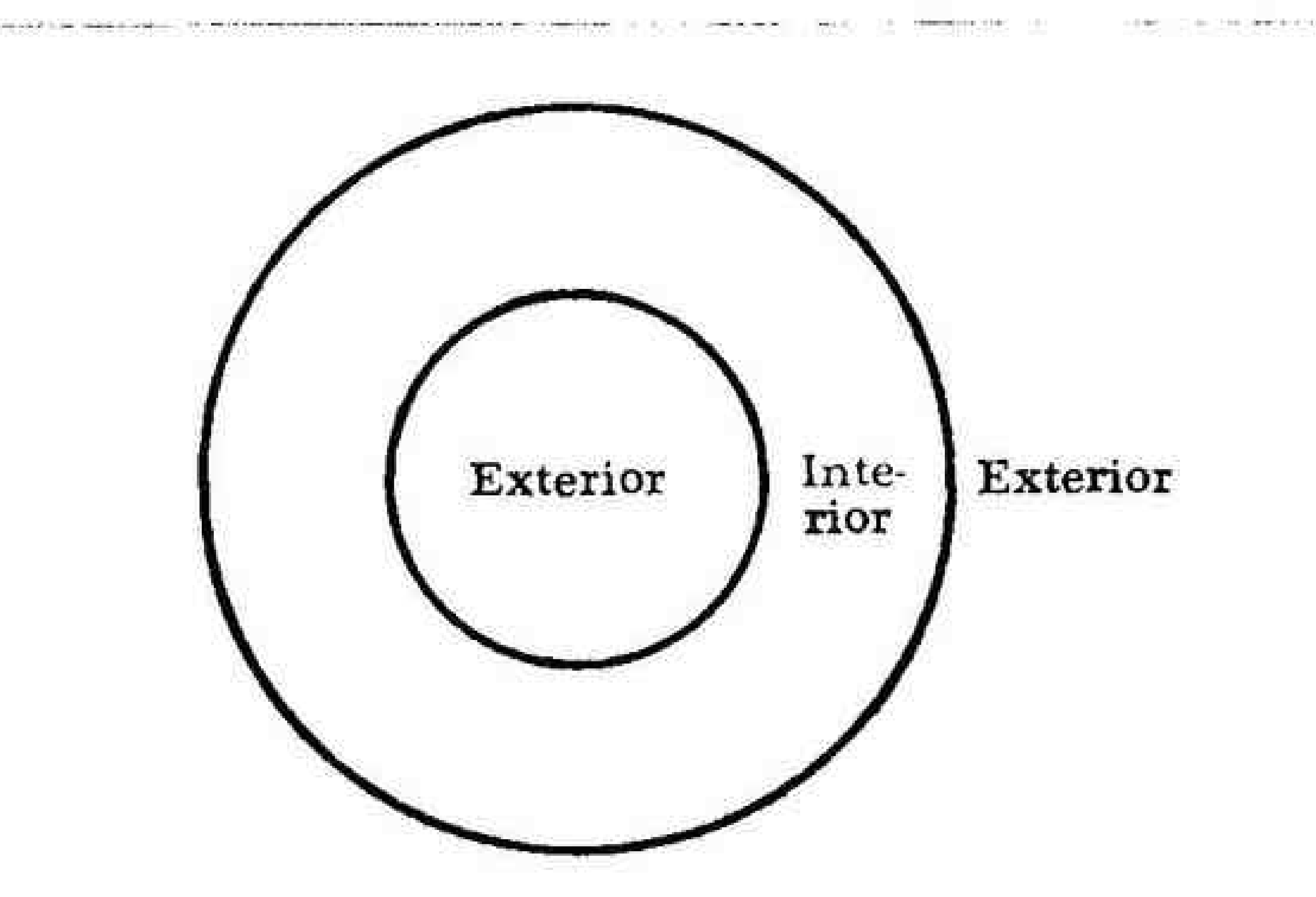


Fig. 98

piedades gastronómicas, sino también por las topológicas. Es un ejemplo de una variedad de dos dimensiones que *no obedece* al teorema de Jordan, puesto que se cruza a sí misma. Pero este tipo de rosquilla es demasiado difícil para nuestra modesta preparación matemática. Debemos conformarnos con las variedades que cumplen el teorema de Jordan y que, a pesar de ello, originan bastantes trastornos.

La figura 98 muestra un *anillo*: la parte de un plano limitada por dos círculos concéntricos. Un anillo es una figura que *no* es simplemente conexa ya que su frontera consiste de *dos* curvas en lugar de una. ¿Cómo podemos distinguir el interior del exterior?

Muchas de las dificultades que experimentamos al explicar y analizar los problemas espaciales surgen de las limitaciones del lenguaje reveladas por esa pregunta. Uno se siente inclinado a simpatizar con el ebrio caballero que estaba haciendo eses alrededor de una columna cilíndrica en un bulevar de París, al mismo tiempo que se lamentaba amargamente: "Por amor de Dios", preguntóle un curioso transeúnte, "¿qué es lo que le ocurre?" "Estoy emparedado", gemía el bebedor, "emparedado".

Los términos puramente relativos, tales como "interior" y "exterior", pueden confundir tanto al matemático como al melancólico caminante. El único recurso consiste en convenir en una definición formal. Viene fácilmente a la mente una analogía familiar. Todas las partes de la ciudad de Nueva York que quedan a un lado de la 5.ª Avenida son rotuladas "Este", mientras que a las que quedan del lado opuesto se las designa "Oeste".

Intuitivamente, todo el mundo conoce la diferencia que existe entre el interior y el exterior de un círculo. ¿Pero puede traducirse a términos precisos esta noción intuitiva? Ya que nadie tiene la más leve dificultad para distinguir entre izquierda y derecha, y las nociones de sentido de avance de las agujas del reloj y sentido contrario al avance de las agujas de un reloj tampoco ocasionan confusiones, podemos definir nuevamente a "interior" y "exterior", en función de izquierda y derecha, sentido de avance de las agujas del reloj y sentido contrario al avance de las agujas del reloj. Así, por ejemplo, partiendo de la circunferencia del círculo y marchando en sentido contrario al avance de las agujas del reloj, el "interior" se define como la región que queda a la izquierda y el "exterior" como la que se deja a la derecha.

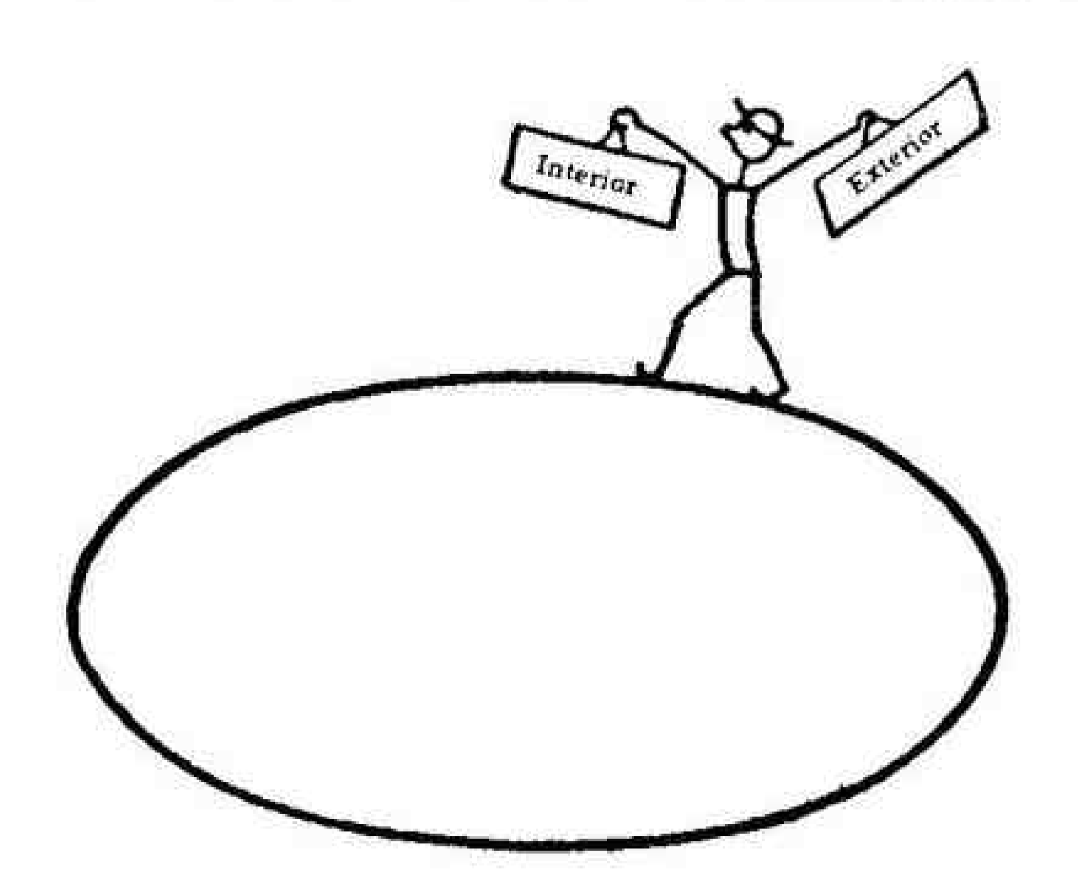


Fig. 99. El hombre marcha en sentido contrario al avance de las manecillas del reloj sobre el contorno de la curva. A la izquierda queda el interior y a la derecha el exterior.

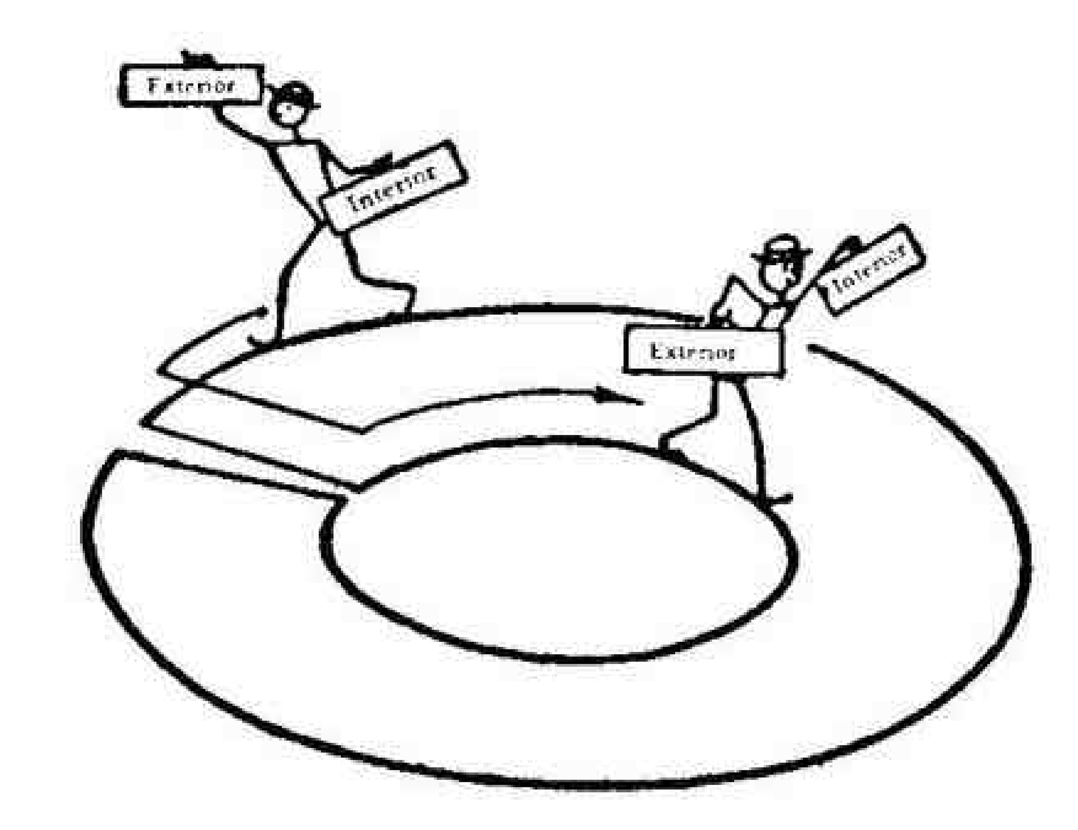


Fig. 100. Interior y exterior del anillo cortado.

La aplicación de esta definición a una variedad no simplemente conexa, tal como el anillo, requiere un ligero artificio. Cortando cualquier variedad no simplemente conexa, se la puede transformar en otra simplemente conexa.

De este modo, mientras que interior y exterior no parecen tener mucho significado en relación con el anillo (fig. 98), la simple operación de cortarlo lo transforma en una nueva variedad (fig. 100), para la cual la definición es aplicable en forma sencilla. El matemático conviene en que aquellas regiones que están "adentro" después que se corta al anillo, esta-

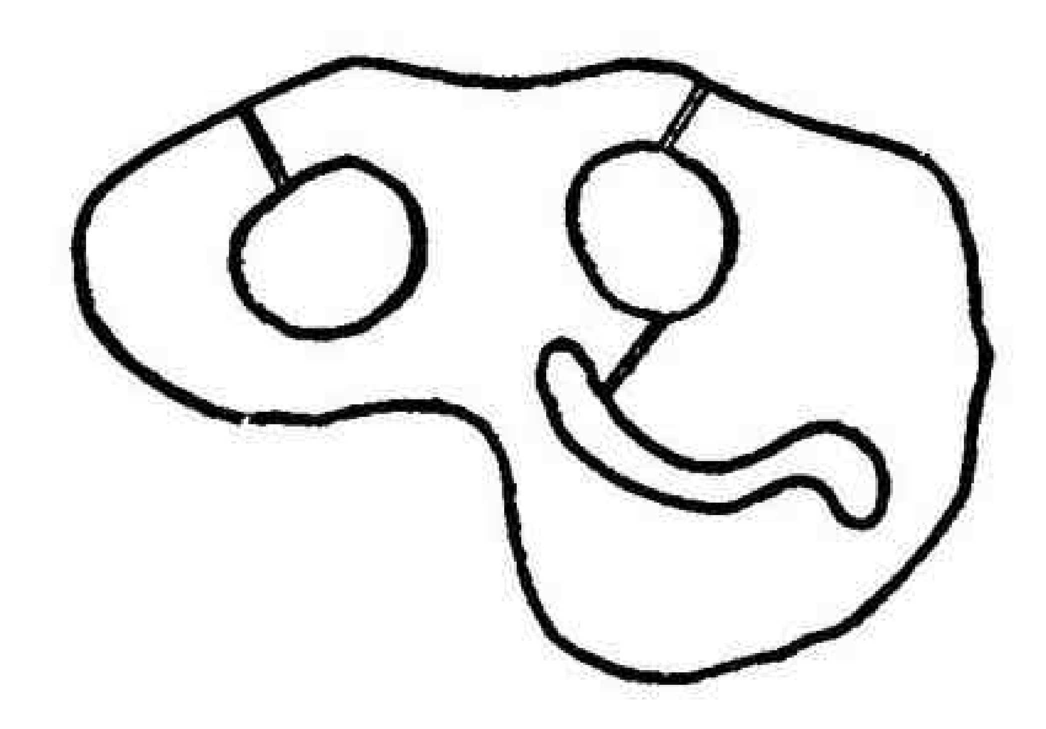


Fig. 100(a). Una curva triplemente conexa. Necesita tres cortes para ser simplemente conexa.

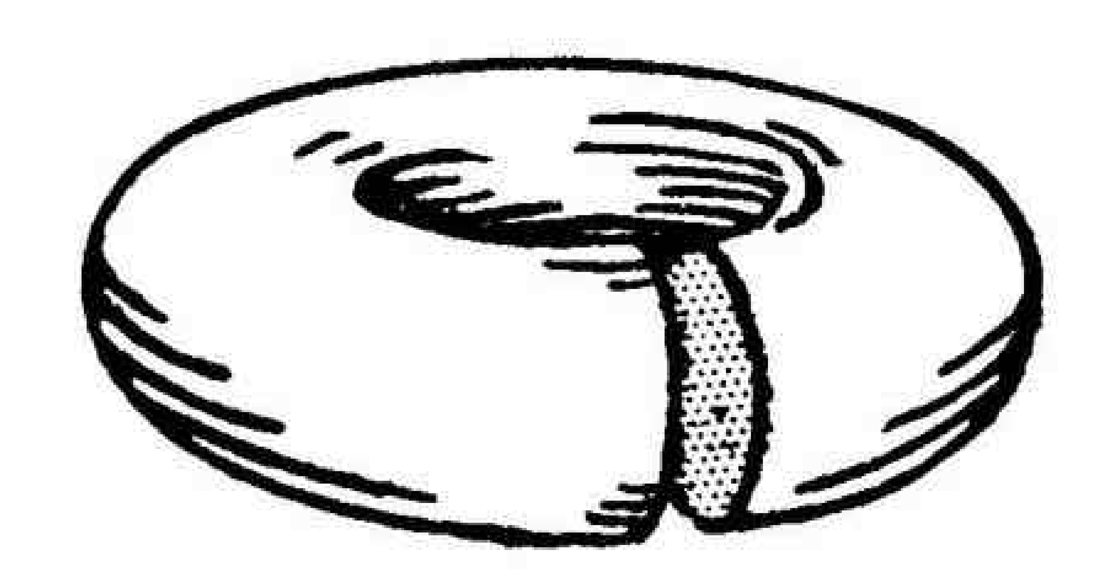


Fig. 101. La rosquilla se convierte en una salchicha.

ban "adentro" antes de que se cortara; y las regiones que están "afuera" después del corte, también lo estaban antes. La rosquilla presenta el mismo problema, en tres dimensiones, que el anillo en dos. "¿El orificio de la rosquilla, forma parte del interior o del exterior de la misma?" Si nos basamos por completo en la experiencia lograda en la mesa del desayuno, podríamos asegurar que el agujero es interior; pero los pocos hechos hasta aquí reunidos darían origen a algunas dudas. Se desprende que el agujero *interior* de la rosquilla es *exterior*. Por supuesto que la primera impresión no era una ilusión óptica. La conclusión de que el agujero es exterior es puramente conceptual y debe considerársele como una consecuencia lógica de ciertas definiciones.

Así como en *dos* dimensiones cualquier variedad simplemente conexa es equivalente a un círculo, en *tres* dimensiones, cualquier superficie simplemente conexa, es equivalente a una *esfera*. Mediante una deformación gradual, sin rupturas, cualquier objeto de tres dimensiones, simplemente conexo, puede ser transformado en una esfera. *Una rosquilla* no se puede transformar así, de donde se deduce que *no* es simplemente conexa. Pero una operación similar a la llevada a cabo con el anillo —un simple corte— transforma a la rosquilla en una salchicha, que es simplemente conexa y es el equivalente topológico de una esfera.

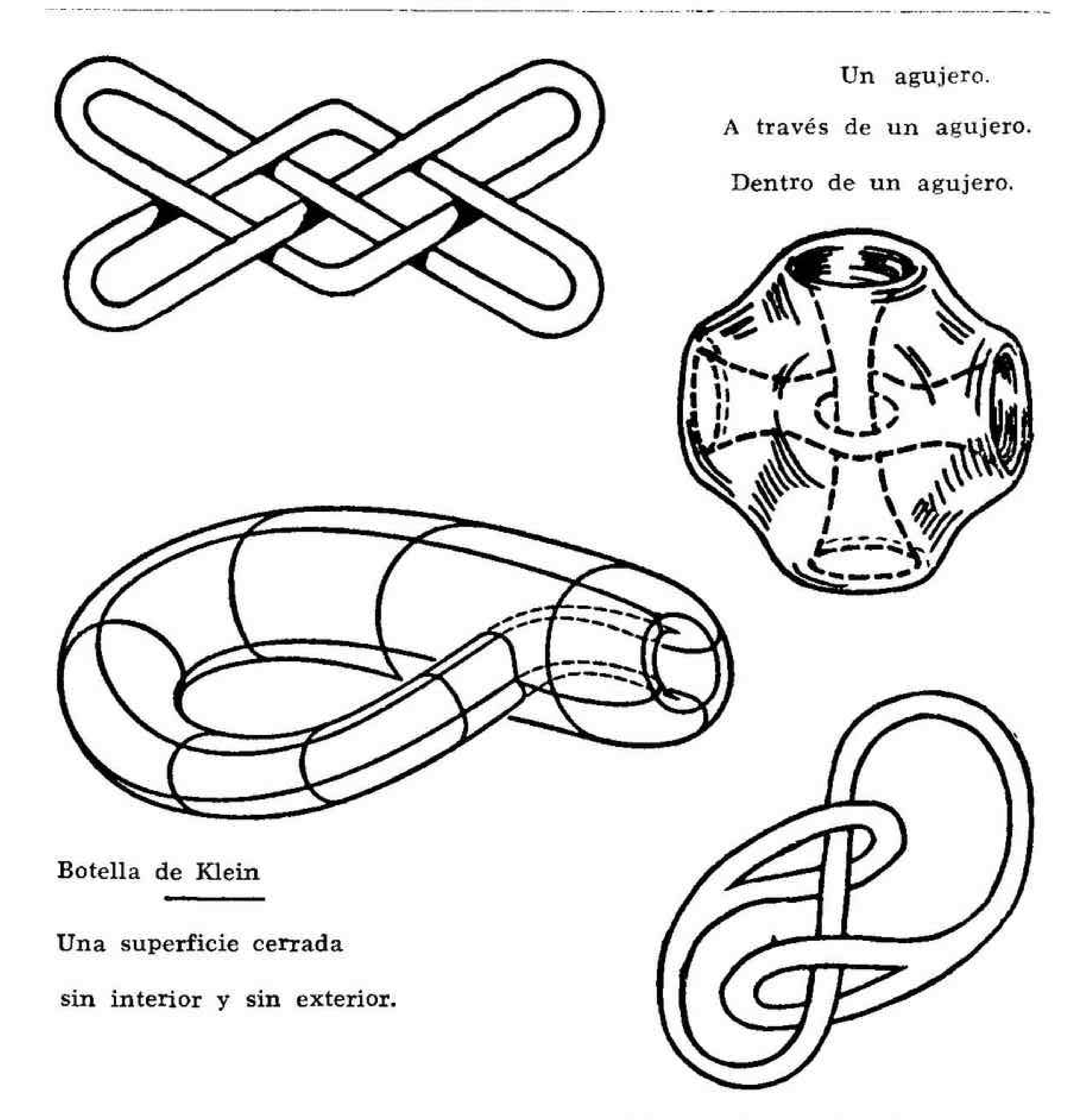
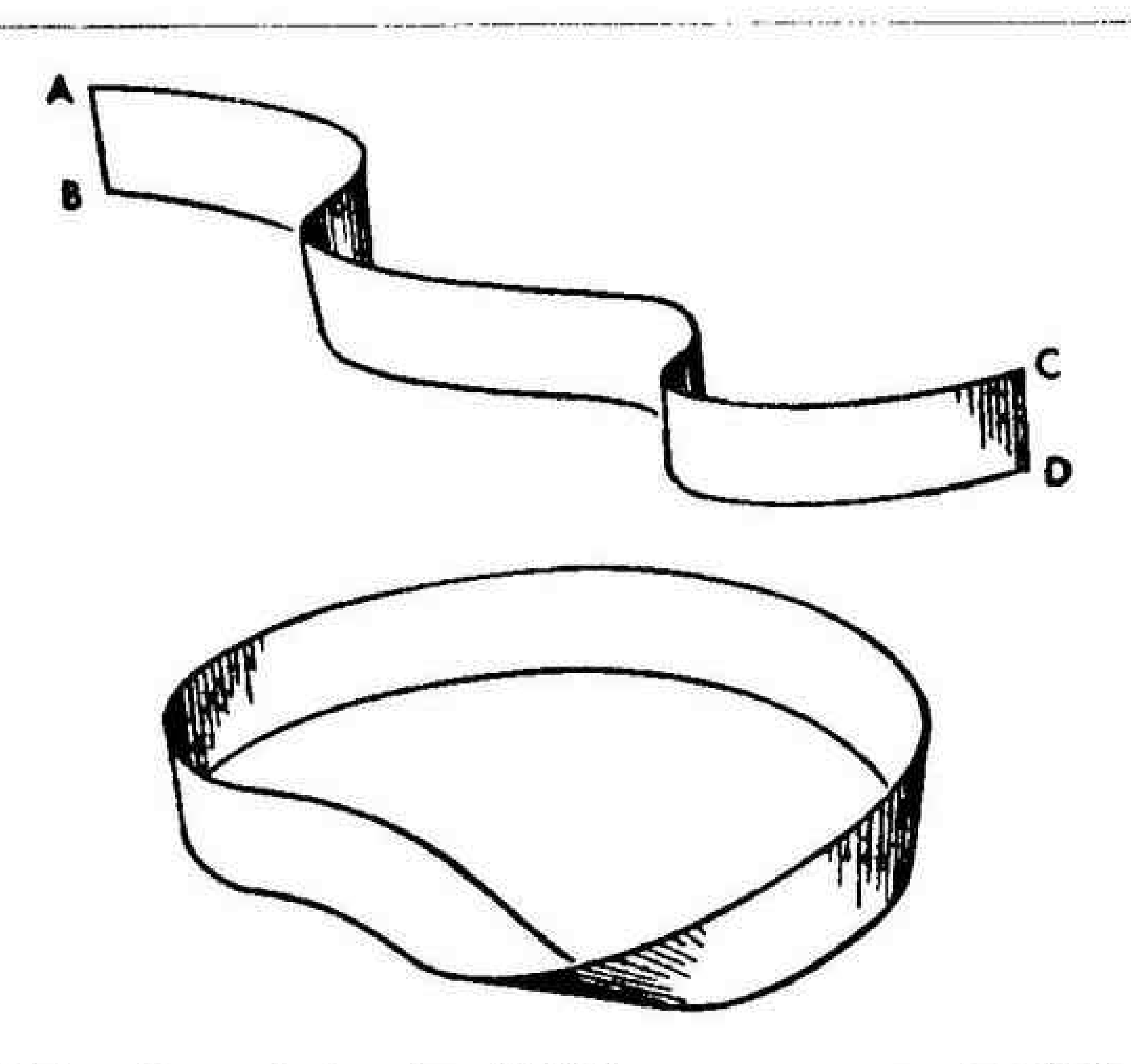


Fig. 102. Variedades topológicas rarísimas. Complicaciones derivadas de las rosquillas.

La rosquilla, junto con otros objetos que aparecen en la figura 102 son algunas de las variedades más difíciles que se estudian en topología. Ninguno de ellos es simplemente conexo y, por lo tanto, ninguno puede ser transformado en una esfera. Pero con un número de cortes, análogos a los ejecutados en el anillo y en la rosquilla, estas complicadas variedades pueden transformarse en figuras simplemente conexas. Así, con un número suficiente de cortes, es posible transformar, aun a la rosquilla más tortuosa, en el equivalente de una esfera.

El número de cortes necesario para efectuar dicha transformación no depende de la casualidad, sino que está perfectamente determinado y depende del orden de conexión de la variedad. Puede formularse una regla general, que se aplicará tanto a los objetos fantásticos como a los fáciles. Como en todas las investigaciones matemáticas, sólo dicha regla revelará el principio fundamental. Consecuentes con ello, los topólogos no se detienen ante la consideración de las variedades de tres dimensiones, por complicadas y prohibitivas que sean, puesto que van más allá de los límites de la imaginación e idean teoremas válidos aun para rosquillas de *n dimensiones*.

Una de las curiosidades de la topología es la cinta de Möbius, que se construye muy fácilmente. Tómese un rectángulo de papel, alargado, *ABCD* (fig. 103), retuérzasele media vuelta y únanse sus extremos de manera que *C* caiga en *B* y *D* en *A* (fig. 104). Ésta es una superficie *de un solo lado*; si un pintor conviniese en pintar solamente un lado de la misma, su sindicato se interpondría, puesto que al pintar un lado estaría, en realidad, pintando los dos[5]. Si la faja no hubiese sido retorcida antes de pegar los extremos, hubiera resultado un cilindro —que es, evidentemente, una superficie *de dos lados*. Sin embargo, la media vuelta eliminó uno de los lados. ¿Increíble? Usted puede convencerse de ello. Trace una línea recta a lo largo del centro de la cinta, continuándola hasta volver al punto de partida. Separe ahora los extremos de la cinta y verá que *ambos lados* han sido recorridos por la línea recta aun cuando, al trazarla, usted no cruzó ninguno de sus bordes. Si usted hubiese seguido este mismo procedimiento con un cilindro, habría tenido que cruzar so-



Figs. 103, 104. La cinta de Möbius —una superficie unilátera y bilátera.

bre el borde para pasar de uno a otro lado. Aunque todos los dictados del sentido común indican que la cinta, con la media vuelta, tiene dos bordes que le sirven de contorno, hemos demostrado que sólo tiene uno, por cuanto dos puntos cualesquiera de la cinta de Möbius pueden ser unidos con tan sólo partir de un punto y trazar la trayectoria hasta el otro sin levantar el lápiz o sin atravesar con él, borde alguno.

Hay mucho de divertido e interesante en esta cinta.

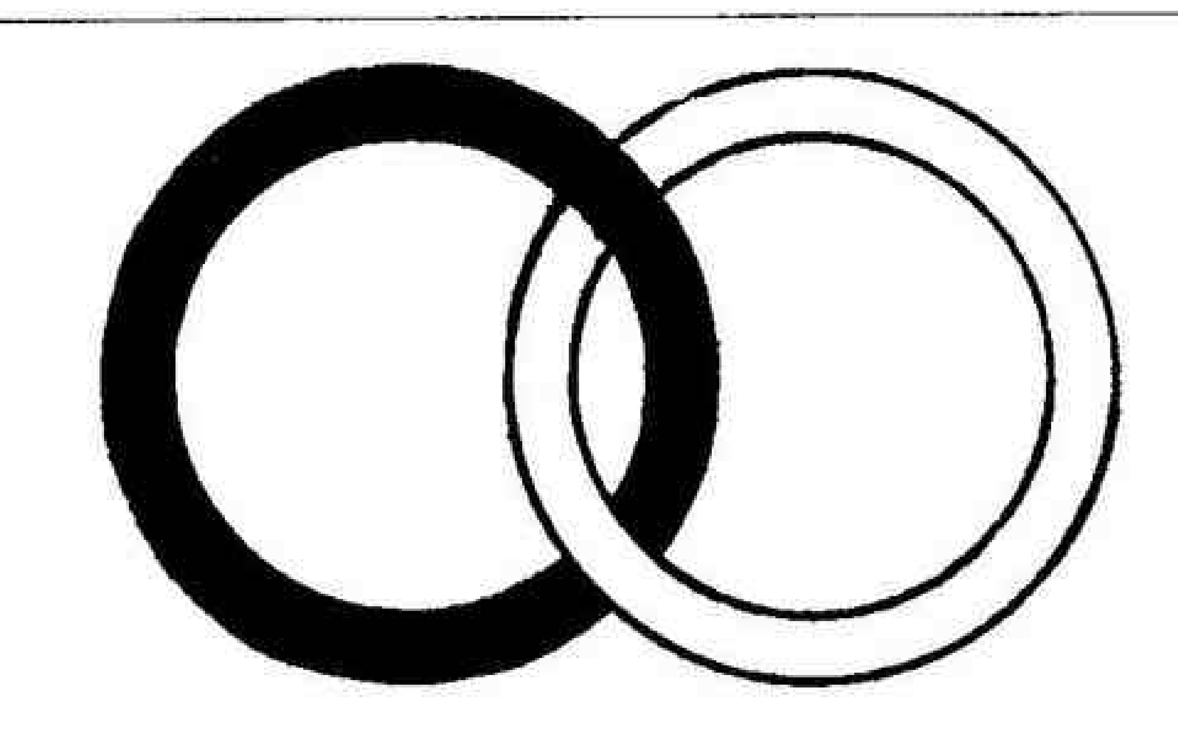


Fig. 105

Cuando usted haya estudiado las propiedades descritas, córtela por la mitad con unas tijeras, a lo largo de una línea trazada por el centro. ¡El resultado será sorprendente! Y usted puede continuar, doblando y cortando algunas veces más, para obtener nuevas sorpresas.

Dos anillos de hierro unidos en la forma indicada en la figura 105 no pueden ser separados a menos que se rompa uno de ellos. Pero siendo esto perfectamente evidente, ¿cómo lo demostraremos? Antes de que se inventara la topología ninguno de los recursos de las matemáticas se adaptaban para esa tarea. Sólo la creación de recursos especiales hizo posible dar una demostración analítica de un hecho tan evidente.

Aquí hay un problema similar. Ate un trozo de cordel a sus muñecas. Ate otro a las muñecas de un compañero de tal manera que enlace al primero (fig. 106).

¿Piensa usted que puede separarse de su compañero sin romper la cuerda? Aunque *se parece* al problema de separar los dos anillos, que llegamos a la conclusión de que era imposible, esta hazaña, en cambio, puede llevarse a cabo. Inténtelo.

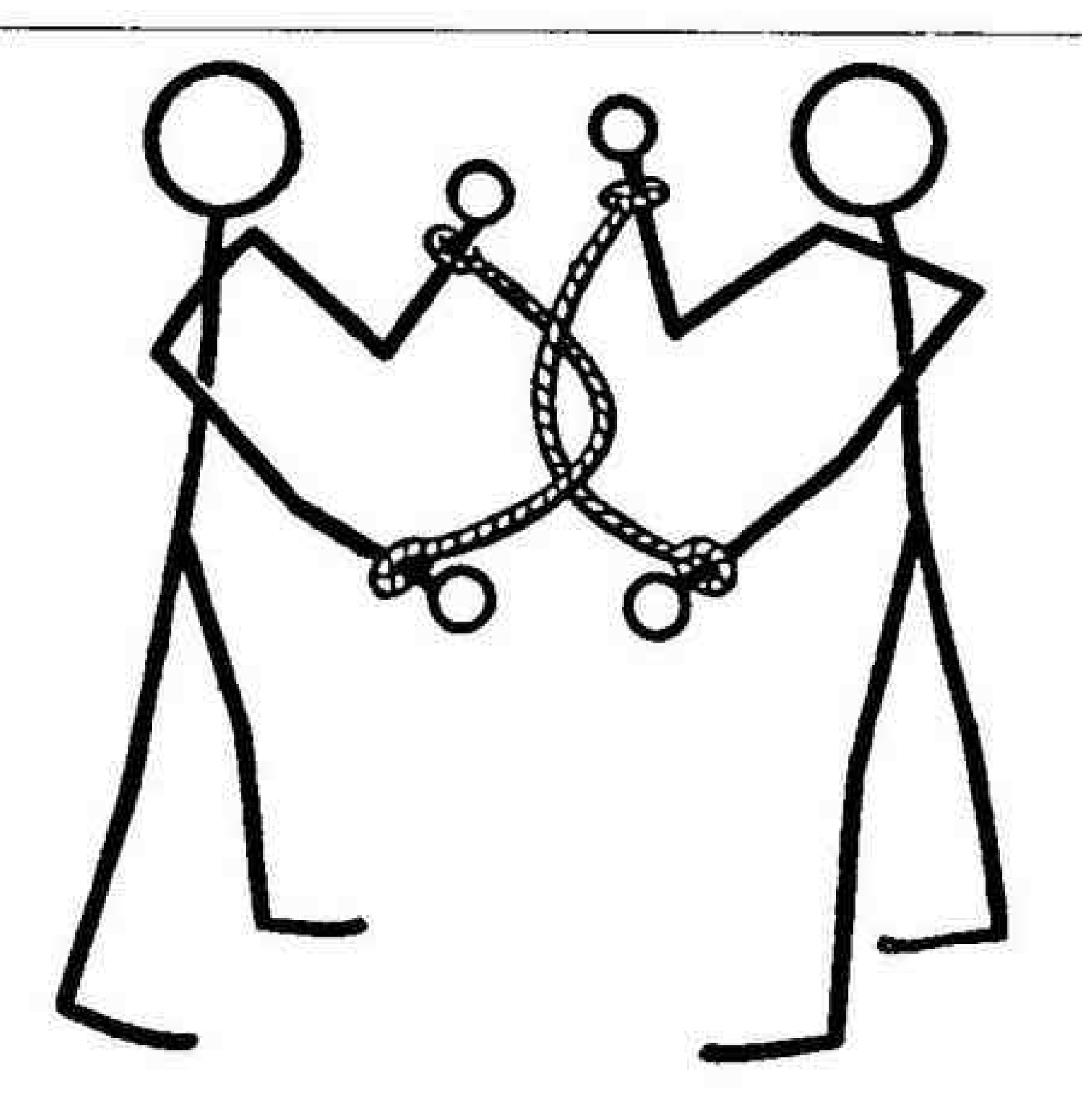


Fig. 106

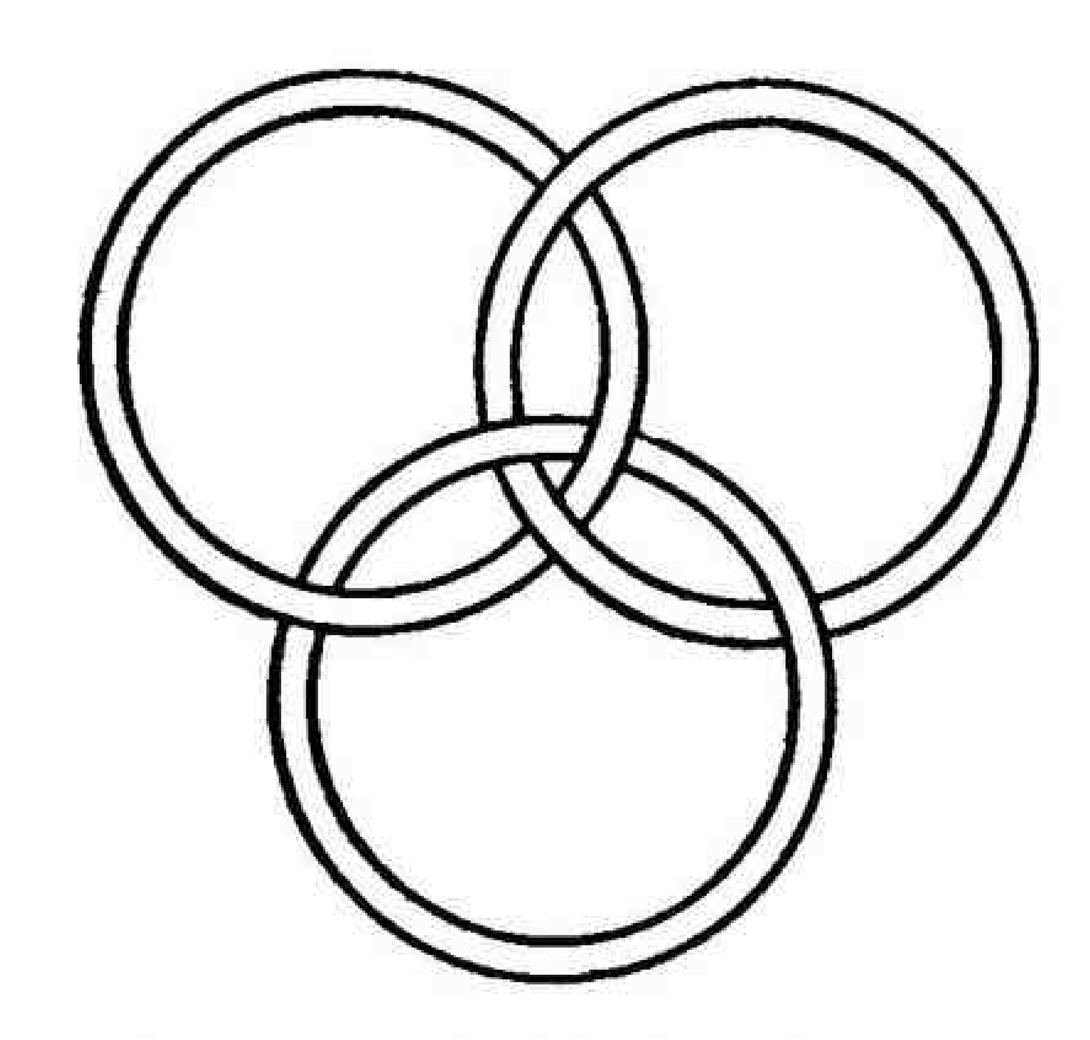


Fig. 107. Ésta es la marca de fábrica de un conocido cervecero. Los tres anillos tienen entre sí esta extraña relación. Si se retira uno de los anillos los otros dos quedan libres. *De este modo, dos anillos cualesquiera no están unidos, pero los tres, sí.* Dicho de otra manera, los anillos no están unidos dos a dos pero cada uno sostiene a los dos restantes.

Con un topólogo y un par de tijeras a mano (en previsión de accidentes), puede usted tratar de sacarse el chaleco *sin quitarse la chaqueta*. No se requiere ninguna cuarta dimensión. Recuerde simplemente las condiciones del problema. La chaqueta puede estar desabotonada, pero en ningún momento, durante la remoción del chaleco, podrán salirse los brazos fuera de las mangas.

La topología es uno de los miembros más jóvenes de la familia matemática, por cuyo motivo tiene también su problema infantil. Mientras algunos matemáticos se han contentado con dedicarse a las rosquillas, nudos y rosquillas del *analysis situs*, un bando determinado de matemáticos pediatras, ha enfocado exclusivamente su atención al Problema de los Cuatro Colores. Por breve tiempo, en el siglo XIX, se pensó que el niño había sido curado y su problema resuelto, pero estas esperanzas fueron vanas y el problema de los cuatro colores continúa desconcertando a los más distinguidos topólogos.

En una época o en otra, todos hemos tenido cierta experiencia en colorear mapas. Los mapas que representaban el Santo Imperio Romano, los estados algodoneros del sur antes de la Guerra de Secesión o la organización de Europa por el Tratado de Versalles, son penosamente delineados todos los días en la escuela. Recientemente, este asunto se ha tornado más agitado que nunca. Debe tenerse siempre a mano gruesos lápices de colores y una buena goma. Pronto descubren los estudiantes, en su curso de cartografía, que si se va a colorear un mapa, para los países que tienen fronteras comunes, tales como Francia y Bélgica, deben emplearse colores distintos a fin de poderlos distinguir de una ojeada. La generalización de esa idea condujo a la pregunta: "¿Cuántos colores son necesarios para pintar un mapa, con cualquier número de países, de manera que dos estados adya-



Figs. 108, 109, 110

centes no tengan el mismo color?" Este problema ha trastornado a los cartógrafos durante muchos años.

La figura 108 representa una isla. Cada uno de los dos países es dueño de una parte de ella. Para este mapa se necesitan tres colores —uno para el mar y los otros dos para cada uno de los países.

Para pintar la isla de la figura 109 se requieren cuatro colores. El mapa con más regiones, como el de la figura 110, también necesita cuatro colores. La razón no es difícil de descubrir por cuanto el país situado en el centro, marcado con 1, puede ser del mismo color que el mar sin que ello ocasione confusión alguna.

Las figuras 111 y 112, requieren, respectivamente, tres y cuatro colores, aun cuando contienen más regiones que cualquiera de los mapas que anteceden.

Es completamente natural suponer que a medida que el mapa se hace más complicado, al pintar más países se requerirán colores adicionales para diferenciar dos territorios adyacentes cualesquiera. Aunque parezca muy extraño, hasta ahora les ha sido imposible a los matemáticos construir un mapa para el cual *no* sean suficientes cuatro colores. Al mismo tiempo, nadie ha podido demostrar por medios ordinarios que cuatro colores *son suficientes* para cualquier mapa posible.

El problema del mapa de cuatro colores quedó resuelto en 1976: cuatro colores bastan. Así lo declara, ufano, el matasellos del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Illinois, al que pertenecían los matemáticos Kenneth Appel y Wolfgang Haken, quienes llevaron a cabo tal proeza. Pero la demostración de que cuatro colores son suficientes para colorear mapas planares cualesquiera, aunque es una demostración matemática, difiere mucho de las tradicionales, tanto por la enorme extensión de los cálculos requeridos, como por valerse para ejecutarlos de computadores digitales

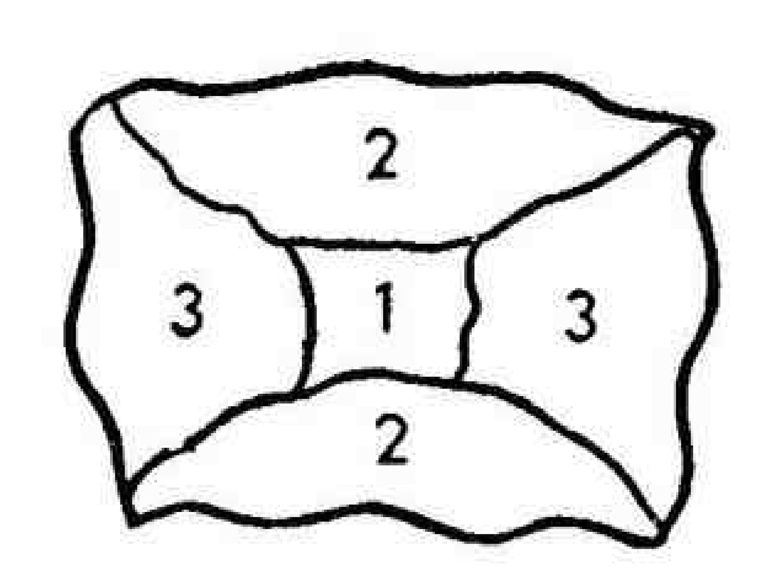


Fig. 111. Una isla que es propiedad de cinco países requiere sólo de tres colores para pintar su mapa.

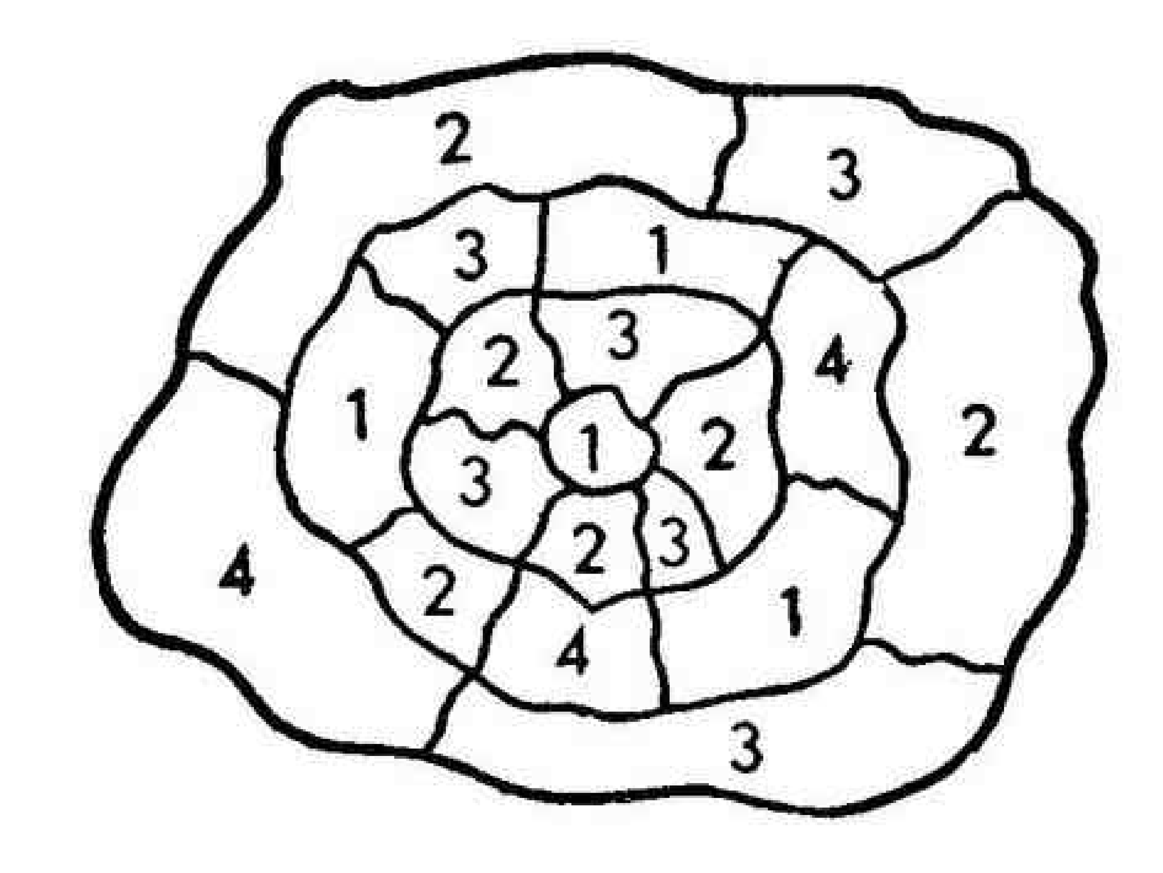


Fig. 112. Una isla con diecinueve países. Solamente bastan cuatro colores para su correspondiente mapa.

en forma que no tiene precedentes. De hecho, es materialmente imposible comprobar la veracidad de la demostración sin valerse de un computador. Más importante aún, ciertas ideas cruciales de la demostración fueron perfeccionadas mediante experimentos computarizados. Dicen Appel y Haken:

"Terminamos la construcción de un conjunto inevitable de configuraciones irreducibles en junio de 1976. El teorema de los cuatro colores estaba demostrado. Habíamos utilizado 1.200 horas de funcionamiento de tres computadores distintos"... "Para desarrollar el procedimiento fue preciso examinar manualmente unos 10.000 entornos de vértices de carga

positiva y analizar, mediante máquina, más de 2.000 configuraciones. Considerable parte de este material, incluida la reducción de 1.428 configuraciones, fue utilizada en la demostración final. Y aunque el procedimiento de descarga (sin las reducciones) puede ser revisado manualmente en un par de meses, sería virtualmente imposible comprobar los cómputos de reducción en esta forma."

Los modernos computadores de alta velocidad habían sido utilizados ya para trabajos matemáticos de carácter numérico, por ejemplo, el cálculo de millones de cifras del número π, o la verificación del carácter primo de ciertos números muy grandes, tales aplicaciones no pasaban de ser aplicaciones de métodos y algoritmos bastante breves, cuyo análisis teórico entraba de lleno dentro de la capacidad intelectual humana. No había en ello discontinuidad con la concepción tradicional de demostración matemática. Hacia finales del siglo pasado, los matemáticos habían logrado construir potentes teorías con las que resolvieron multitud de difíciles cuestiones. Se fortaleció la creencia de que toda cuestión formulable en lenguaje matemático podría llegar a ser matemáticamente resuelta creando conceptos nuevos lo suficientemente potentes. Se creía además, que un matemático competente podría revisar por sí mismo las soluciones en un tiempo razonable. El problema de los cuatro colores era una de tales cuestiones. Si no había sido resuelto aún era por no haberse creado el instrumental matemático adecuado.

Pero la decimonónica fe en la completitud de las matemáticas quedó conmocionada en el decenio de 1930, en razón de ciertos descubrimientos en la lógica formal. Entre otras cosas, quedó demostrado que el sistema lógico en apariencia más natural, el de la aritmética ordinaria, contenía enunciados verdaderos cuya veracidad no puede ser demostrada dentro del sistema. Hay, además, teoremas de enunciados breves, pero cuyas demostraciones son tan largas que sería imposible consignarlas en tiempos razonables. Dificultades similares surgieron, hacia 1950, en otras ramas de las matemáticas. No faltaron quienes empezasen a conjeturar que el teorema de los cuatro colores pudiera ser uno de esos teoremas tan imposibles de demostrar como de refutar. Otros especialistas opinaron que de existir una demostración, sería imposible presentarla, por su enorme longitud.

Sabemos ahora que existe una demostración. Pero lo que no sabemos (y tal vez no lleguemos a saber nunca) es si existe una demostración que sea elegante, concisa, y completamente comprensible por una mente matemática *humana*.

Appel y Haken están convencidos de que existen teoremas de gran interés matemático que sólo podrán demostrarse por medios computarizados. Y aun cuando el teorema de los cuatro colores no fuera uno de ellos, sí es buen ejemplo de lo que podría hacerse para demostrar los que sí lo fueran. De no existir ninguna demostración breve del teorema de los cuatro colores, habría nacido una nueva categoría de teoremas, que podrían llamarse "intrínsecamente complejos", teoremas que carecen de demostración en el sentido tradicional.

Y aunque resulte paradójico, se han dado demostraciones breves para superficies mucho más complicadas, tales como el toro (la rosquilla) y la esfera con asas.

A. B. Kempe, matemático y abogado inglés, autor de un célebre librito que llevaba el provocativo título *"Cómo trazar una línea recta"*, ofreció en el año 1879 una demostración de que cuatro colores eran tanto necesarios como suficientes para pintar cualquier mapa sobre una esfera. Desgraciadamente, hoy se sabe que la demostración de Kempe contenía un error lógico fatal.

Que cinco colores son suficientes para dibujar cualquier mapa sobre una esfera, o sobre un plano, es, en sí mismo, notable y vale la pena ver por qué. La demostración se basa

en el aún más notable teorema de Euler sobre sólidos simplemente conexos que establece: que la suma de los vértices más las caras de cualquiera de dichos sólidos, es igual a la suma de las aristas más 2:

$$V + C = A + 2$$

El teorema de Euler constituye la más simple proposición universal sobre los sólidos. La idea fundamental le era familiar a Descartes, pero muy probablemente su demostración le era desconocida a Euler.

Sabemos que cualquier sólido de tres dimensiones, simplemente conexo, es topológicamente equivalente a una esfera. De este hecho y del teorema de Euler surge una interesante consecuencia: Considérese un cubo hueco, hecho de goma. Está limitado por seis caras, doce aristas y ocho vértices. Inflemos este cubo hasta que parezca una esfera. Las caras del cubo serán entonces regiones de la esfera y sus aristas los límites de estas regiones. Los vértices serán los puntos donde se encuentran tres regiones. Se ve entonces que el ejercicio de colorear la esfera es gobernado por el teorema de Euler; puesto que si cada región representa un país, cada línea curva, la frontera entre dos países, y cada vértice la unión de tres países, el número de éstos, más el número de puntos en los cuales concurren tres países, es igual al número de líneas divisorias más dos. De esta manera vemos cómo el teorema de Euler se hace extensivo a las figuras curvas.

Para un sólido con un agujero, tal como el toro, el teorema no se cumple. En realidad no se cumple para sólidos no simplemente conexos. Resumiendo: el teorema de Euler se aplica en topología *solamente* cuando cada una de las caras de las figuras es simplemente conexa y toda la figura también lo es.

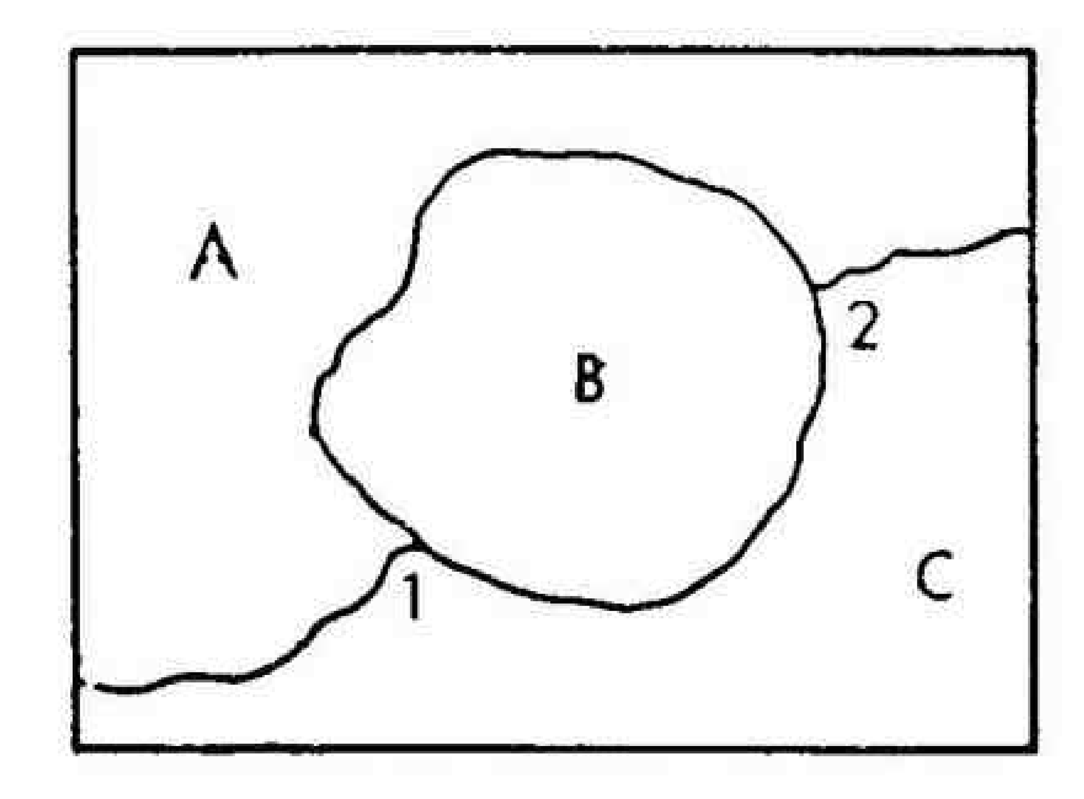


Fig. 113. Los puntos 1 y 2 son comunes a los tres países *A*, *B*, *C*.

Entre quienes han hecho contribuciones esenciales a la topología, el holandés L. J. Brouwer es uno de los más famosos. Particularmente en la teoría de los conjuntos de puntos, los teoremas topológicos de Brouwer han demostrado ser de señalada importancia. Pero no es de sus contribuciones técnicas de las que aquí nos ocuparemos. En el año 1910 publicó un problema basado en una idea del matemático japonés Yoneyama que sirve de hermoso ejemplo acerca de las dificultades y sutilezas de la topología. La solución de este problema quizá no le deje satisfecho, pero no por ello dejará de desafiar a su imaginación.

La figura 113 es un mapa de tres países. Los puntos señalados con 1 y 2 son un tanto singulares, porque en cada uno de ellos se encuentran los tres países. Manifiestamente, dichos puntos son raros en cualquier mapa, no importa cuán complicado sea, pues no hay muchos casos geográficos de tres naciones que se toquen en un solo punto. Pero aun cuando hubiese muchos de esos puntos, si fuese un mapa muy extraño, su número siempre sería reducido comparado con la totalidad de puntos a lo largo de todas las líneas limítrofes. Es razonablemente cierto que un punto frontera, ele-

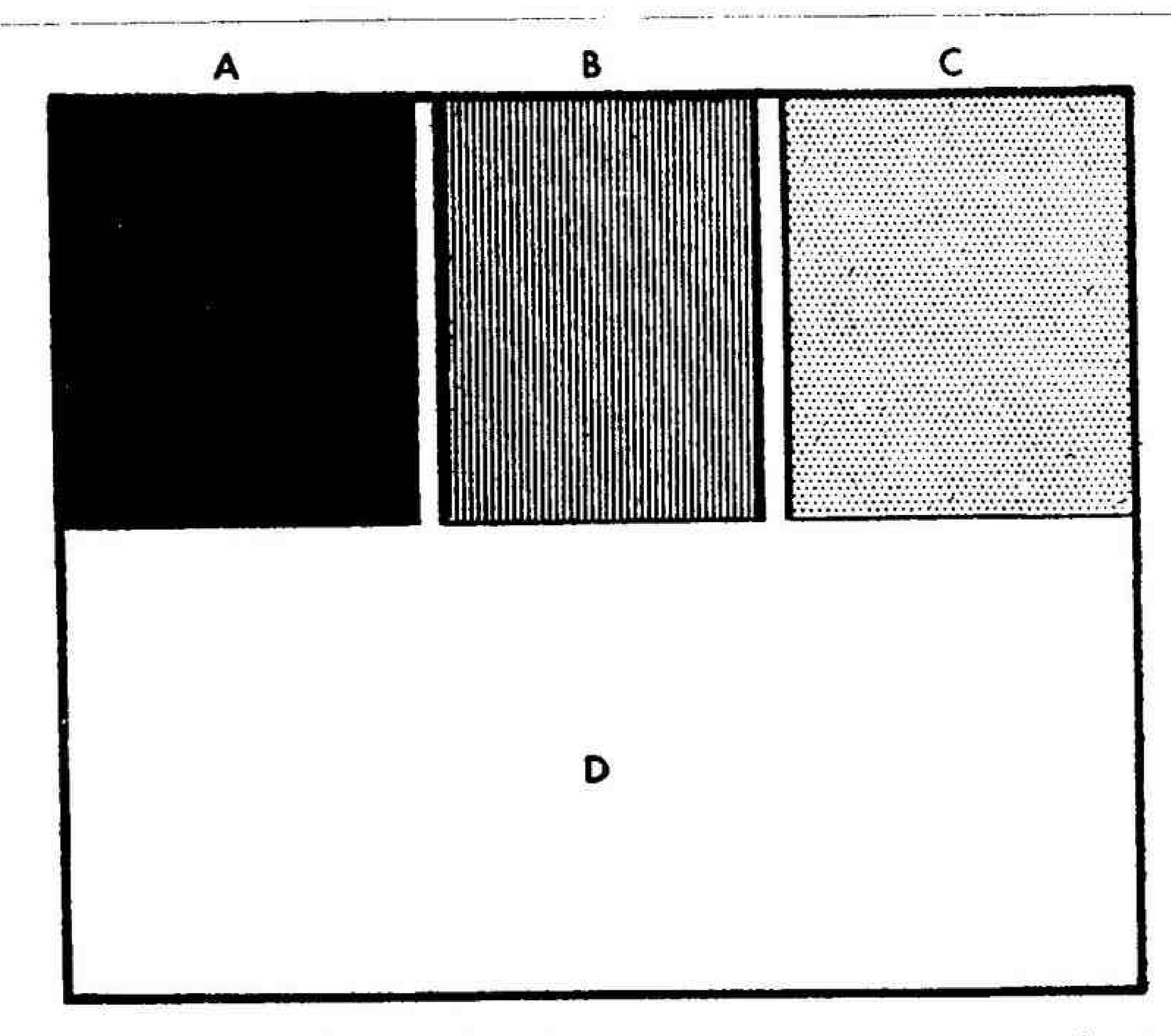


Fig. 114. Los países *A*, *B* y *C* están separados por corredores no ocupados y *D* es una tierra no reclamada.

gido al azar, en *cualquier* mapa, será el punto de unión de, a lo sumo, dos países.

Ahora bien, Brouwer ideó un ejemplo, a primera vista completamente increíble, de un mapa de tres países, en el cual, *cada punto simple, a lo largo de la frontera de cada nación, es un punto de unión de los tres países*[6].

Consideremos el mapa de la figura 114.

Las franjas que separan a cada dos naciones y toda la porción blanca del mapa, representan territorio no reclamado. De conformidad con el espíritu del *Lebensraum**, el país

* El espacio vital. *(N. del R.)*

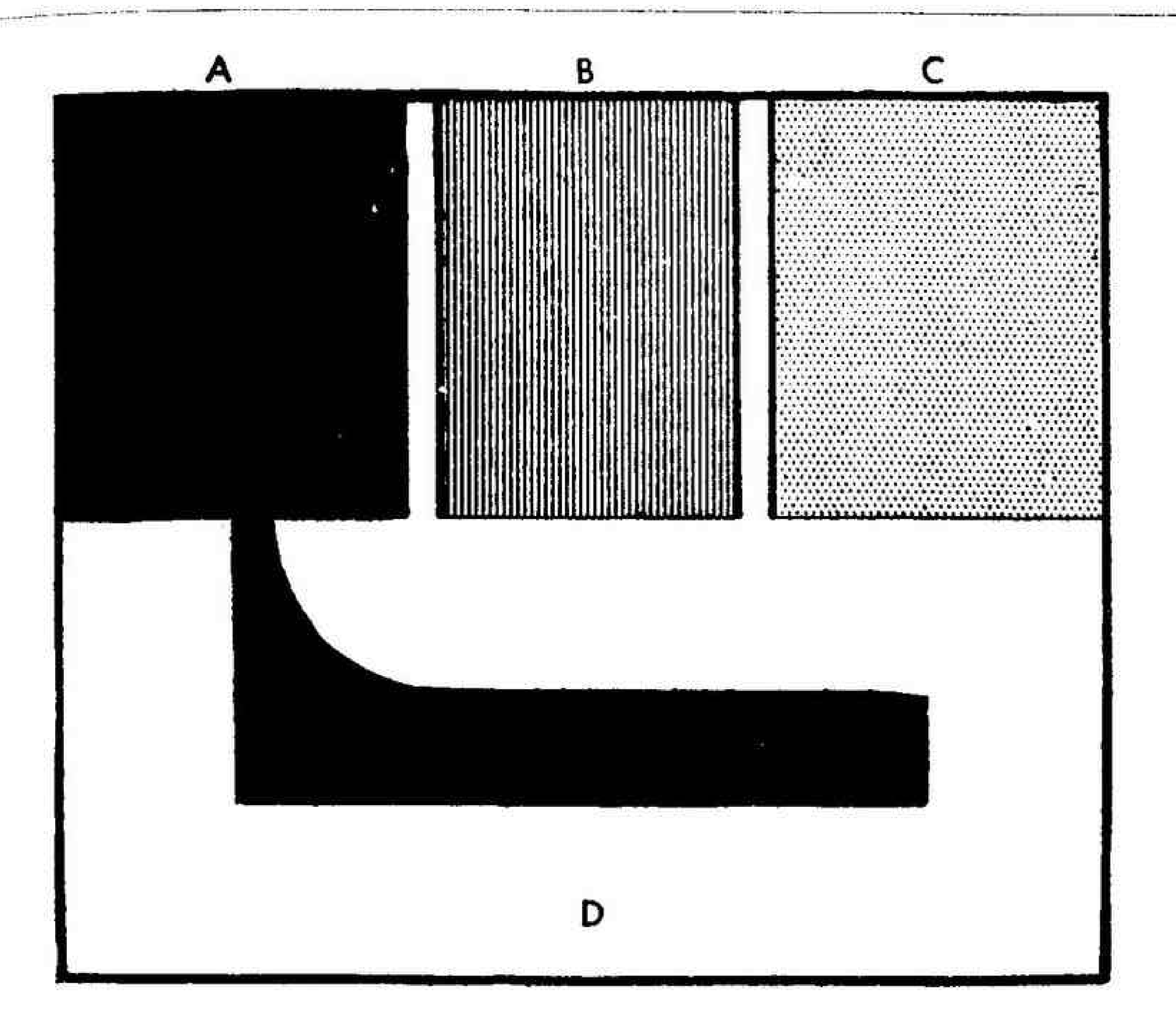


Fig. 115

A decide extender su esfera de influencia sobre la tierra no reclamada, posesionándose de una porción sustancial de la misma. Para ello construye un corredor que no toca a la tierra de sus vecinos pero que no deja a punto alguno de la tierra no reclamada restante, a más de un kilómetro de algún punto del país *A* agrandado, que se ha extendido sobre el mapa tal como lo indica la figura 115.

El país *B*, en lugar de aplicar sanciones, decide adueñarse de otra parte antes de que sea demasiado tarde. Conteniéndose, así como teniendo en cuenta el mayor poderío de su vecino, *B* extiende un corredor a medio kilómetro de distancia de cada punto de la tierra no reclamada restante. Este corredor altera el mapa según se indica en la figura 116.

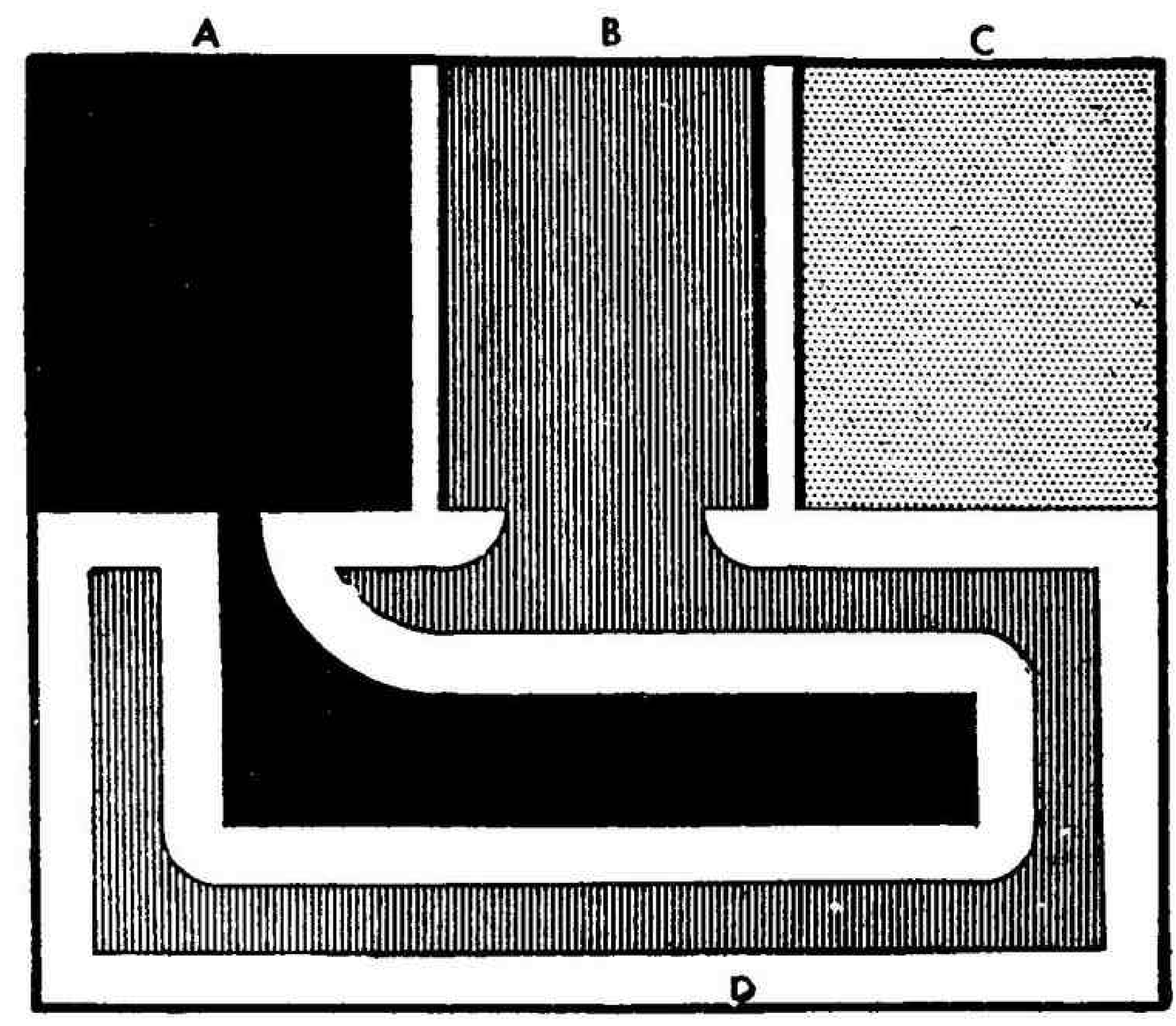


Fig. 116

Por supuesto que el país *C* no quiere quedarse atrás. Construye entonces un corredor que se aproxima a 1/3 de kilómetro a todos los puntos que quedan de la tierra no reclamada, pero, al igual que los otros dos corredores, no toca ningún otro país excepto el suyo propio. Este nuevo mapa es el que aparece en la figura 117.

Con esto, cada uno de los tres países debería sentirse plenamente satisfecho. Pero no sucede así, pues estamos sólo en el comienzo. El país *A* tiene el corredor más corto, originándose así un estado intolerable de cosas que debe remediarse *sofort**. Decide entonces construir un nuevo corre-

* En seguida, en alemán *(N. del R.)*

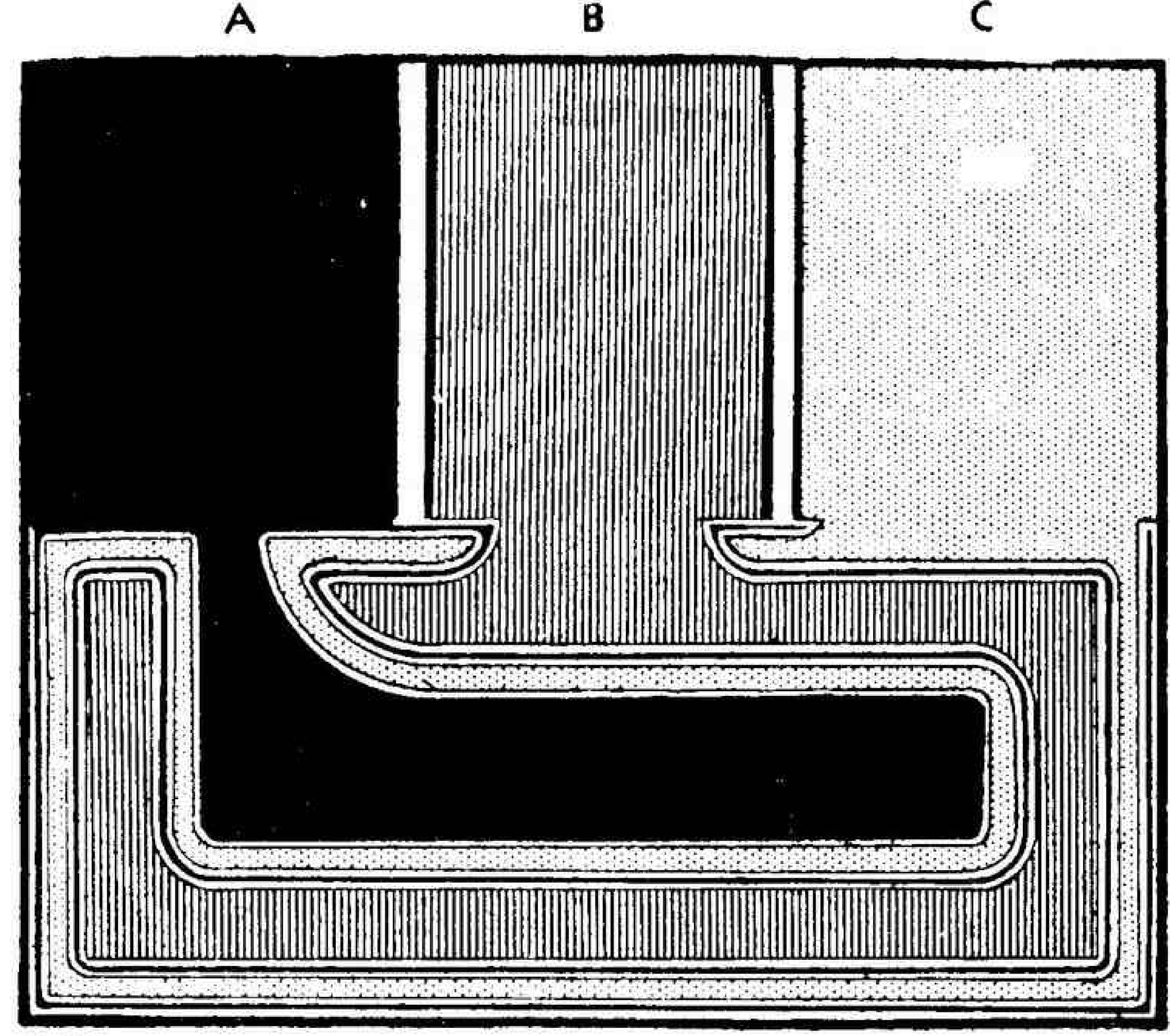


Fig. 117

dor para extenderse dentro del territorio que queda, lo cual aproximará cada punto de ese territorio dentro de 1/4 de kilómetro (fig. 118).

El país *B* sigue su ejemplo con un corredor que se aproxima a cada punto no ocupado dentro de 1/5 de kilómetro. El corredor que entonces hace *C* viene dentro de 1/6 de kilómetro de cada punto no ocupado y el tiovivo sigue girando. ¡Más y más corredores! Jamás se establece contacto alguno entre ellos aun cuando se aproximan más y más: 1/7, 1/8, 1/9, ..., 1/100, ..., 1/1.000, ..., 1/1.000.000, 1/gúgol ... de kilómetro.

Podemos suponer a fin de que este afiebrado programa se complete en un intervalo finito de tiempo ("Plan Bienal"), que la construcción del primer corredor del país *A* llevó un

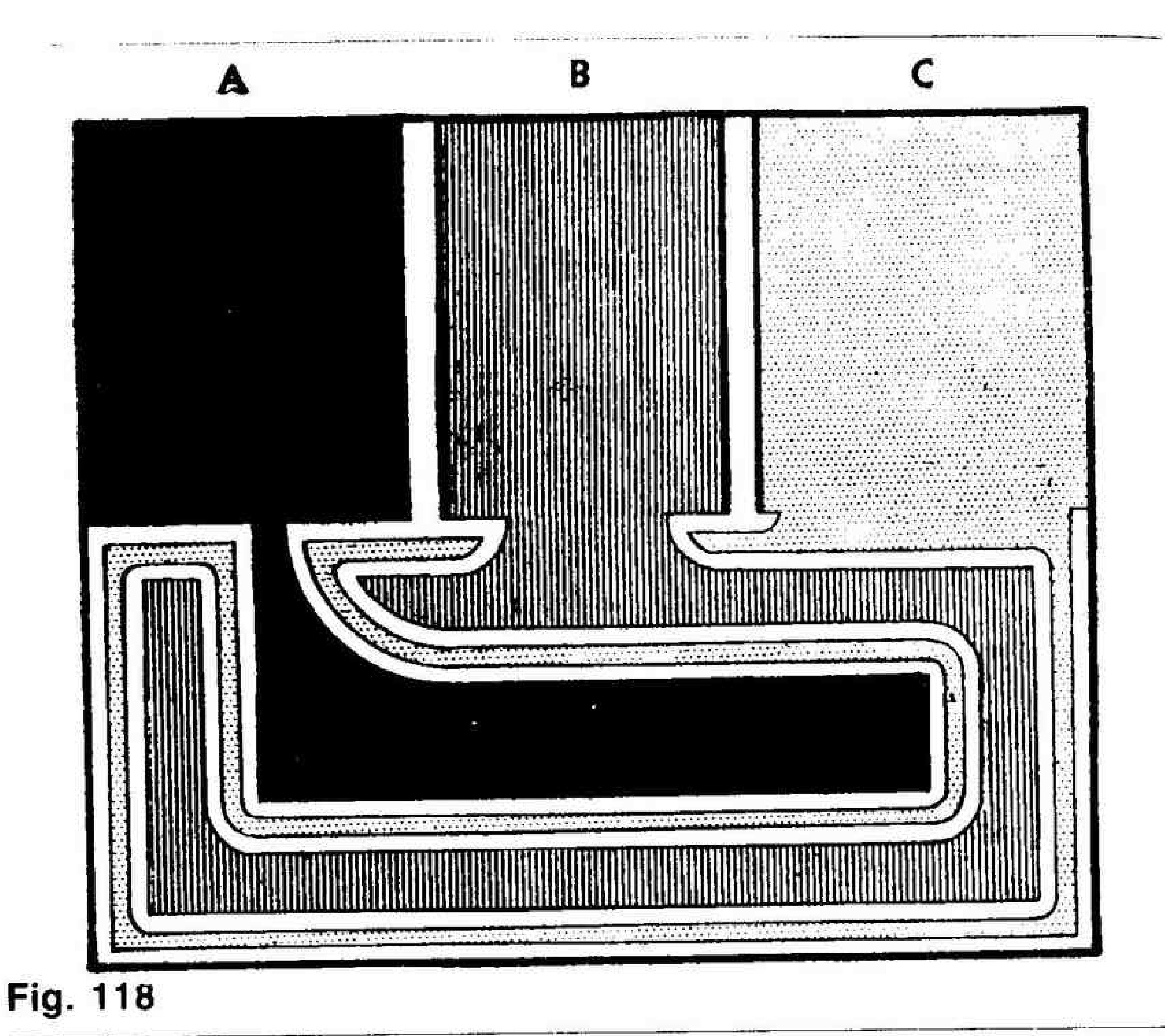


Fig. 118

año, el primer corredor de *B*, medio año, el primer corredor de *C*, un trimestre, el segundo corredor de *A* un mes y medio y así sucesivamente; cada corredor requiere exactamente la mitad del tiempo que su inmediato anterior. El tiempo total empleado, da lugar a la conocida serie:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 2$$

De este modo, al cabo de los dos años, el territorio otrora no reclamado ha sido ocupado por completo y ni un punto del mismo queda sin poseedor. Sobre cada centímetro del

mismo flamea la bandera de uno de los tres países, ya sea, *A*, *B* o *C*.

¿Qué pasaría con el nuevo mapa que quisiese representar estas fronteras? Realmente resulta imposible dibujarlo, pero supongamos que tratamos de concebir qué aspecto presentaría. Este mapa conceptual está constituido por partes de matemáticas serias y fantasía pura, puesto que *¡cada simple punto limítrofe del mapa sería un punto de encuentro no de dos, sino de los tres países!*

En un mundo evidentemente dinámico e incesantemente variable, donde la innovación es perpetua, la búsqueda de cosas que no cambian constituye uno de los principales objetivos de la ciencia. Los filósofos, desde la época anterior a Sócrates, han estado escudriñando en busca de la esencia inalterable de la realidad. Hoy, esa es la tarea del hombre de ciencia.

En topología, así como en otras ramas de las matemáticas, ese empeño toma la forma de una búsqueda de invariantes. Repetidas veces en el transcurso de esa investigación, surge la necesidad de abandonar la intuición, de trascender los límites de la imaginación. Los invariantes de 4, 5, 6 y *n* dimensiones son puramente conceptuales. Adaptarlos a nuestras vidas, encontrarles aplicación en el laboratorio, darles forma para servirse de ellos en las ciencias aplicadas, parece imposible. Nada hay en la experiencia con qué compararlos, ni siquiera un sueño en el que pudieran representar un papel.

Sin embargo, lo que los matemáticos recogen lenta y dolorosamente, poco a poco, en el fantasmagórico mundo de lo increíble, es, en realidad, una porción del mundo de cada día, de las mareas, las ciudades, los hombres, los átomos, los electrones y las estrellas. De pronto, todo cuanto vino de un

mundo de n dimensiones, halla aplicación en el de tres. O acaso descubrimos que, al fin y al cabo vivimos en una tierra de n dimensiones. Es la recompensa del valor, la laboriosidad, el fino y libre sentido poético e imaginativo, común al matemático, al poeta y el filósofo. Es el cumplimiento de la visión de la ciencia.

NOTAS DE ESTE CAPÍTULO

1 Para dos recorridos distintos, debe levantarse una sola vez el lápiz del papel; para tres recorridos, dos veces y para n recorridos distintos, n-1 veces. página 279.

2 Poincaré, *Science and Hypothesis*, página 285. Hay edición española: "La Ciencia y la hipótesis", en Espasa Calpe, colección Austral, Madrid.

3 Invariante es un término inventado por el matemático inglés Sylvester, a quien se le llamó el Adán matemático por los muchos nombres que introdujo en las matemáticas. Los términos "invariante", "discriminante", "Hessiano", "Jacobiano", son suyos. Además empleaba caracteres hebreos en algunos de sus artículos matemáticos, lo cual, según Cajori, hizo que el matemático alemán Weierstrass lo abandonase horrorizado.

Los invariantes aparecen en otras ramas de las matemáticas. La teoría de los invariantes algebraicos, desarrollada por Clebsch, Sylvester y Cayley, está en la memoria de todos los que han estudiado ecuaciones de 2.º grado. Por ejemplo, el discriminante de la ecuación de 2.º grado: $ax^2 + bx + c = 0$, es el caso clásico de un invariante algebraico. Una ecuación de segundo grado sometida a una transformación lineal, mantiene inalterada una cierta relación entre sus coeficientes expresada por el discriminante: $b^2 - 4ac$. El discriminante de la ecuación transformada queda igual al de la ecuación original multiplicado por un factor que sólo depende de los coeficientes de la transformación. página 285.

4 Véase el cap. IV y su nota n.º 4, página 290.

5 Osgood, *Advanced Calculus*, página 297.

6 Aprovechamos aquí la versión del problema dada por un distinguido matemático vienés, el extinto Hans Hahn, porque es más clara y satisface más que la enunciada por el propio Brouwer, página 308.

IX. CAMBIO Y MUTABILIDAD: EL CÁLCULO

La siempre giratoria rueda del Cambio *que rige a todas las cosas mortales.*

SPENSER

La gente solía creer que cuando una cosa cambia, debe estar en un estado de cambio y que cuando una cosa se mueve, está en un estado de movimiento. Hoy se sabe que esto es un error.

BERTRAND RUSSELL

"Todos quienes conozcan el tema, estarán de acuerdo en que las bases sobre las cuales reposa la explicación científica de la naturaleza, son inteligibles sólo a aquellos que han aprendido, por lo menos, los elementos del cálculo diferencial e integral..." Estas palabras de Félix Klein, distinguido matemático alemán, repiten una convicción de todos cuantos han estudiado las ciencias físicas. Es imposible estimar e interpretar la interdependencia de las magnitudes físicas, por medio del álgebra y la geometría únicamente; si no se dispone más que de la simple ayuda de estos recursos matemáticos, es imposible ir más allá del más sencillo fenómeno observado. En la construcción de las teorías físicas, el cálculo es algo más que el cemento que liga los diversos elementos de

la estructura, pues constituye el utensilio usado por el constructor en cada fase de la construcción.

¿Por qué esta rama de las matemáticas se adapta tan particularmente bien a la formulación precisa de los fenómenos naturales? ¿Qué virtudes pueden atribuirse al cálculo de las que no participan ni la geometría ni el álgebra?

Nuestra impresión más común del mundo, sea errónea o no, es su aspecto constantemente variable. La naturaleza, así como los artificios que hemos inventado para dominarla, parecen hallarse en un perpetuo flujo. Aun los "absolutos" —espacio y tiempo— se contraen y se dilatan incesantemente. El día y la noche varían de continuo, explicando las vicisitudes de las estaciones. Por todas partes hay movimiento, fluctuaciones, ciclos de nacimiento, muerte y regeneración.

Por alguna extraña razón, los temas hasta aquí considerados, los muchos dominios de las matemáticas que hemos examinado, han hecho caso omiso de este dinamismo. Con excepción de la función exponencial, no hemos hablado aún de la variación de una cantidad conocida o desconocida. En realidad, hasta aquí, con nuestra preparación, no podríamos haber tratado este concepto. Afortunadamente, cada problema era esencialmente estático. Las geometrías de cuatro dimensiones y las no euclidianas trataban configuraciones inalterables; los rompecabezas y las paradojas se resolvían con ayuda de la inventiva, la lógica y la estática aritmética; la topología buscaba los aspectos invariantes de las formas geométricas, independientes del tamaño y de la forma, y los conceptos desarrollados en los capítulos referentes a PIE, el gúgol y la probabilidad, con una o dos excepciones, estaban exentos del ingrediente "cambio". La conclusión es, pues, inevitable: hemos olvidado al único medio indispensable para atacar la enorme mayoría de los problemas; en otras palabras, nuestra investigación se ha limitado a aspectos periféricos de la escena del mundo.

La palabra "cálculo", que significó originalmente una piedrecilla o guijarro, ha adquirido una nueva connotación. El cálculo puede ser considerado como aquella rama de la investigación matemática que trata del *cambio* y de la *razón de cambio*. La comodidad con la que se viaja en un automóvil, es posible en parte al menos, gracias al cálculo. Y si bien los planetas seguirían sus trayectorias sin el cálculo, Newton lo necesitó para demostrar que las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elipses. Reduciéndonos de lo celestial a lo atómico, la solución de la mismísima ecuación usada por Newton para describir el movimiento de los planetas, determina la trayectoria de una partícula alfa que bombardea un núcleo atómico*. Por medio de la fórmula que relaciona la distancia recorrida por un cuerpo en movimiento, y el tiempo transcurrido, el cálculo permite determinar la velocidad del cuerpo, así como su aceleración en cualquier instante.

Todos los ejemplos que anteceden, sean sencillos o complejos, implican cambio y rapidez de cambio. Sin su exacta enunciación matemática, ninguno de los problemas descritos tendría sentido y mucho menos podría ser resuelto. De esta manera, se ha creado una teoría matemática que toma conocimiento de los cambios inmanentes y omnipresentes del tema bajo estudio y emprenden su examen y explicación. Esa teoría es el cálculo diferencial.

Pero, ¿no habíamos declarado antes, casi fervientemente, que vivimos en un mundo inmóvil? ¿Y no habíamos demostrado extensamente, empleando las paradojas de Zenón, que el movimiento es imposible, que la flecha en vuelo se encuentra realmente en reposo? ¿A qué atribuiremos este aparente cambio de posición?

* Esto sólo es válido para las partículas alfa que se mueven con velocidades relativamente pequeñas.

Además, si cada nueva invención matemática se basa en fundamentos establecidos desde mucho antes, ¿cómo es posible extraer de las teorías del álgebra y la geometría estáticas, una nueva matemática capaz de resolver problemas que impliquen entidades dinámicas?

En cuanto a lo primero, no ha habido cambio en nuestro punto de vista. Estamos todavía firmemente aferrados a la creencia de que éste es un mundo en el que el movimiento, así como el cambio, son casos especiales de un estado de reposo. No hay estado de cambio, si cambio implica un estado cualitativamente distinto del reposo; lo que distinguimos como cambio es simplemente, según señalamos ya una vez, una sucesión de muchas imágenes estáticas diferentes, percibidas en intervalos de tiempo relativamente breves. Con un ejemplo aclararemos esta idea: En el cinematógrafo, una serie de cuadros estáticos se proyectan sobre una pantalla, uno después del otro, en rápida sucesión; cada cuadro difiere sólo ligeramente del que le precede y la impresión que producen es tal, que no queda la más ligera duda en la mente del más inteligente espectador, de que se ha representado un movimiento en la pantalla. Una exhibición completamente convincente de cambio, se presenta por medio de una serie de imágenes completamente estáticas. Sigamos esto con un ejemplo más técnico. Una varilla de acero, fijada por un extremo en posición horizontal, sostiene un peso por el otro extremo. Estando este sistema en reposo, se dice que el conjunto de elementos que lo componen se encuentra en equilibrio. Si, cuando lo volvemos a examinar, después de cierto intervalo de tiempo, comprobamos la misma disposición, la varilla flexionada de la misma cantidad, es evidente que no ha habido cambio. Sin embargo, si observamos una nueva posición de la varilla, habrá tenido lugar, evidentemente, una alteración; es decir, un cambio. Es verdad que el equilibrio sólo podría haber sido perturbado, alterando la posición de

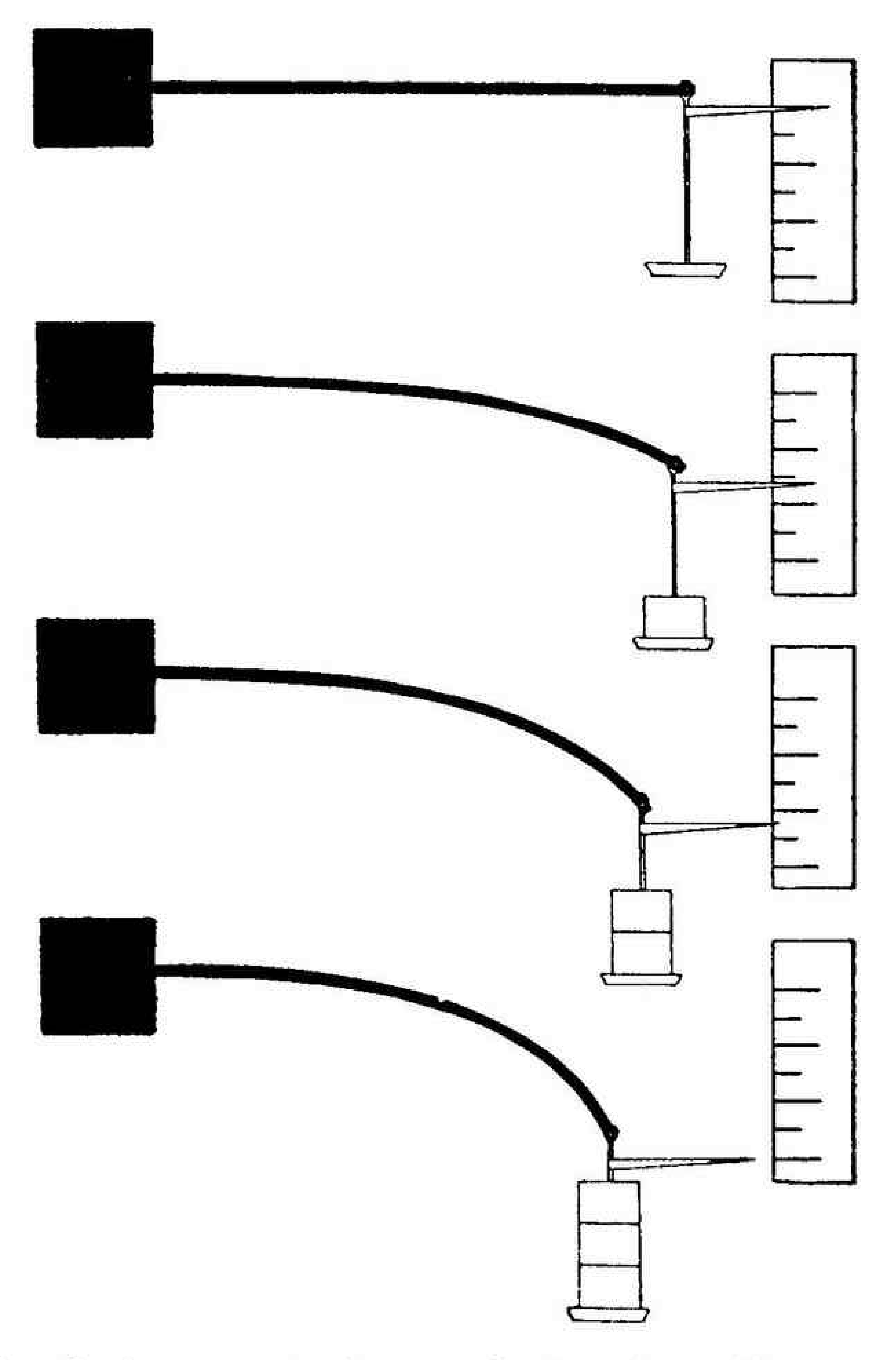


Fig. 119. Cada aumento de peso flexiona la varilla un poco más.

la varilla, por un cambio que se hubiese operado en el peso que sostiene. No es difícil convencernos de que un peso adicional habría flexionado más la varilla y que dichas adiciones, hechas gradualmente, y en forma rápida como los cuadros en movimiento que se proyectan en la pantalla, nos ha-

brían producido la impresión de que la varilla está animada de un movimiento. Por otra parte, si estamos enterados de estas adiciones de peso, llegamos a la conclusión de que lo que realmente hemos observado no es un movimiento sino simplemente una correlación entre la magnitud de la flexión y el grado del peso y que, para distintos pesos, corresponden diferentes posiciones de la varilla.

Intuitivamente convencidos de que hay continuidad en el comportamiento de un cuerpo en movimiento, ya que no vemos realmente a la flecha en vuelo pasar por cada punto de su trayectoria, hay una inclinación irresistible a abstraer la idea de movimiento como algo esencialmente distinto del reposo. Pero debe buscarse el origen de esta abstracción en las limitaciones fisiológicas y psicológicas pues no se encuentra, en modo alguno, justificada por el análisis lógico. El movimiento es una correlación de posición con tiempo. El cambio es simplemente otro nombre para designar una *función*, otro aspecto de esa misma correlación.

En cuanto a lo demás, el cálculo, como descendiente de la geometría y del álgebra, pertenece a una familia estática y no ha adquirido característica alguna que ya no poseyeran sus progenitores. Las alteraciones no son posibles en las matemáticas. De este modo, inevitablemente, el cálculo tiene las mismas propiedades estáticas que la tabla de multiplicar y la geometría de Euclides. El cálculo no es sino otra interpretación, aunque debe admitirse que muy ingeniosa, de este mundo inmutable.

El desarrollo histórico del cálculo no siguió un método claro. Las discusiones filosóficas sobre el significado de ese tema sólo vinieron una vez que se hubo demostrado, indiscutiblemente, su utilidad. Con anterioridad a eso, los filósofos no se habrían dignado considerar que valiera la pena atacarlo. Desgraciadamente no podemos relatar (aunque sería muy divertido) las trampas que cada filósofo y matemático analista, desde Newton hasta Weierstrass, cavaba para sus adversarios y en las que prontamente caía él mismo. Podemos, sin embargo, describir a grandes rasgos, los pasos que precedieron a la teoría, tal cual se la acepta hoy en día.

El cálculo no difiere de otras teorías matemáticas; no surgió completamente desarrollado de la mente de un solo hombre. Más bien se desarrolló en base a la consideración de numerosos problemas ensayados y resueltos con éxito por los predecesores de Newton y Leibniz. "Cada gran época en el progreso de la ciencia, va precedida por un período de preparación y previsión... Las ideas que entraron en acción en esa gran época, habían estado en preparación desde largo tiempo antes [1]."

El advenimiento de la geometría analítica proporcionó un poderoso estímulo a la invención del cálculo, puesto que la representación gráfica de una función reveló muchas características importantes. Kepler ya había notado que, a medida que una cantidad variable se aproxima a su valor máximo, su

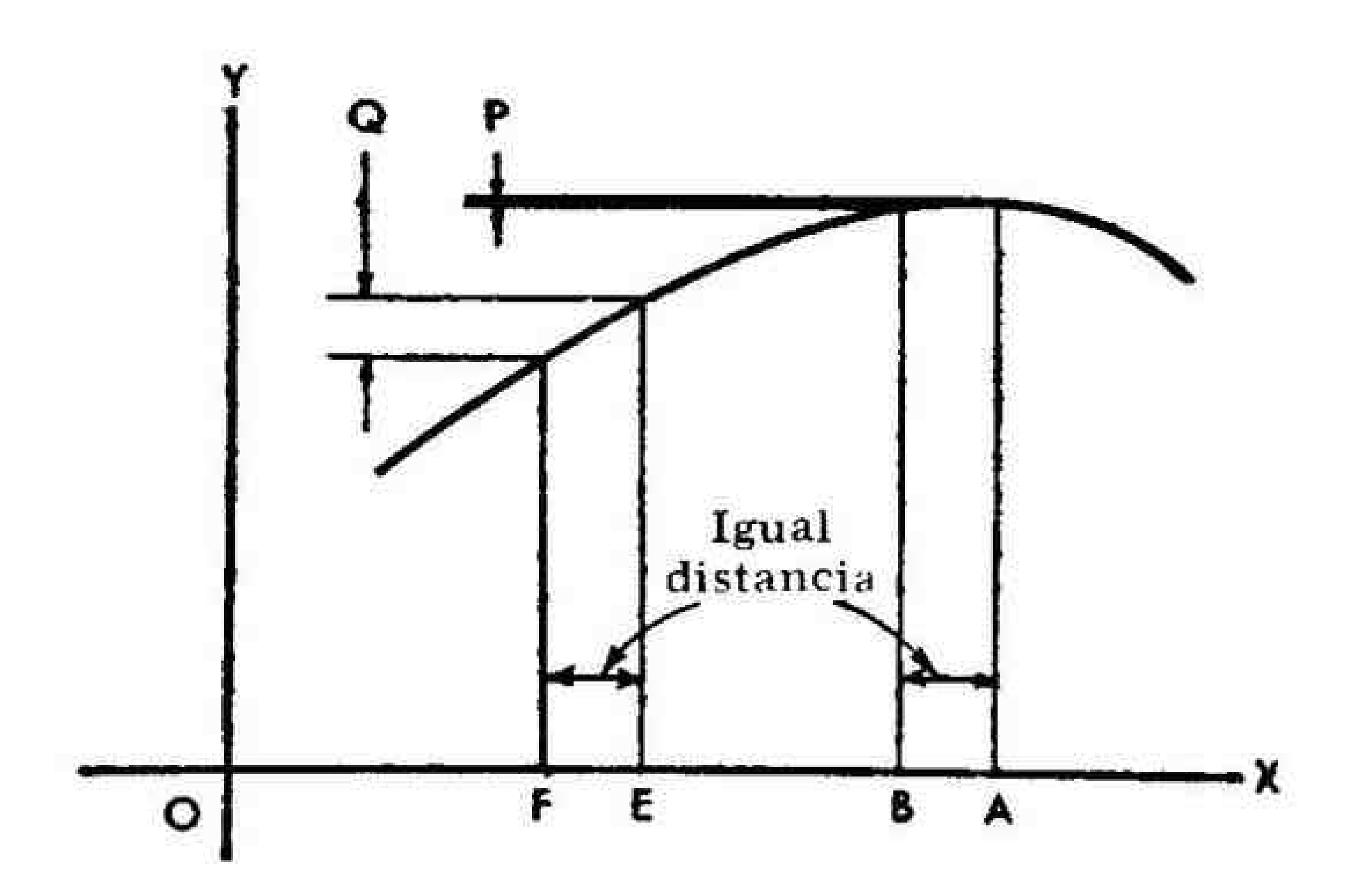


Fig. 120. La razón de cambio de una cantidad variable es más pequeña en el punto máximo que en cualquier otra parte.

razón de cambio se hace menor que en cualquier otro valor. Continúa disminuyendo hasta que, para el valor máximo de la variable, su razón de cambio es nula.

En el diagrama de la figura 120, los valores que toma una cantidad variable se miden por la distancia comprendida entre una línea recta (el eje de las x) y la curva. El valor máximo de la cantidad variable (la distancia máxima desde eje x a la curva), se alcanza en el punto señalado con *A*; al moverse levemente, ya sea a la derecha o a la izquierda de *A*, por ejemplo al punto *B*, el cambio en el valor de la cantidad variable es muy pequeño y está medido por *P*. Si nos movemos a la derecha o a la izquierda de algún otro punto *E* con la misma amplitud en que nos movimos de *A* a *B*, de manera que la distancia *EF* sea igual a la distancia *AB*, el cambio en el valor de la cantidad variable, en la vecindad de *E*, está medido por *Q*. Pero evidentemente, esta segunda anchura *Q*, es mayor que la primera *P*. En esto, que es contribución de Kepler, tenemos un ejemplo geométrico del principio de los máximos y mínimos: la tasa de variación de una cantidad variable es más pequeña en las cercanías de su valor máximo (o mínimo) que en cualquier otra parte. En efecto, en los valores máximos y mínimos, dicha razón de cambio es nula.

Pierre de Fermat, que comparte, con Descartes, del honor de haber descubierto la geometría analítica, fue uno de los primeros matemáticos que ideó un método general aplicable a la solución de problemas que implican máximos y mínimos. Su método, que usó ya en 1629, es sustancialmente el mismo que hoy se aplica a problemas de este tipo. Se pide dibujar un rectángulo tal, que la suma de sus lados sea cuatro pulgadas y que su área sea máxima*. Si llamamos x a un lado del rectángulo máximo, el lado adyacente, como se verá en la figura 121 será $2 - x$; y el área del rectángulo

* El área de un rectángulo está dada por el producto de dos lados adyacentes.

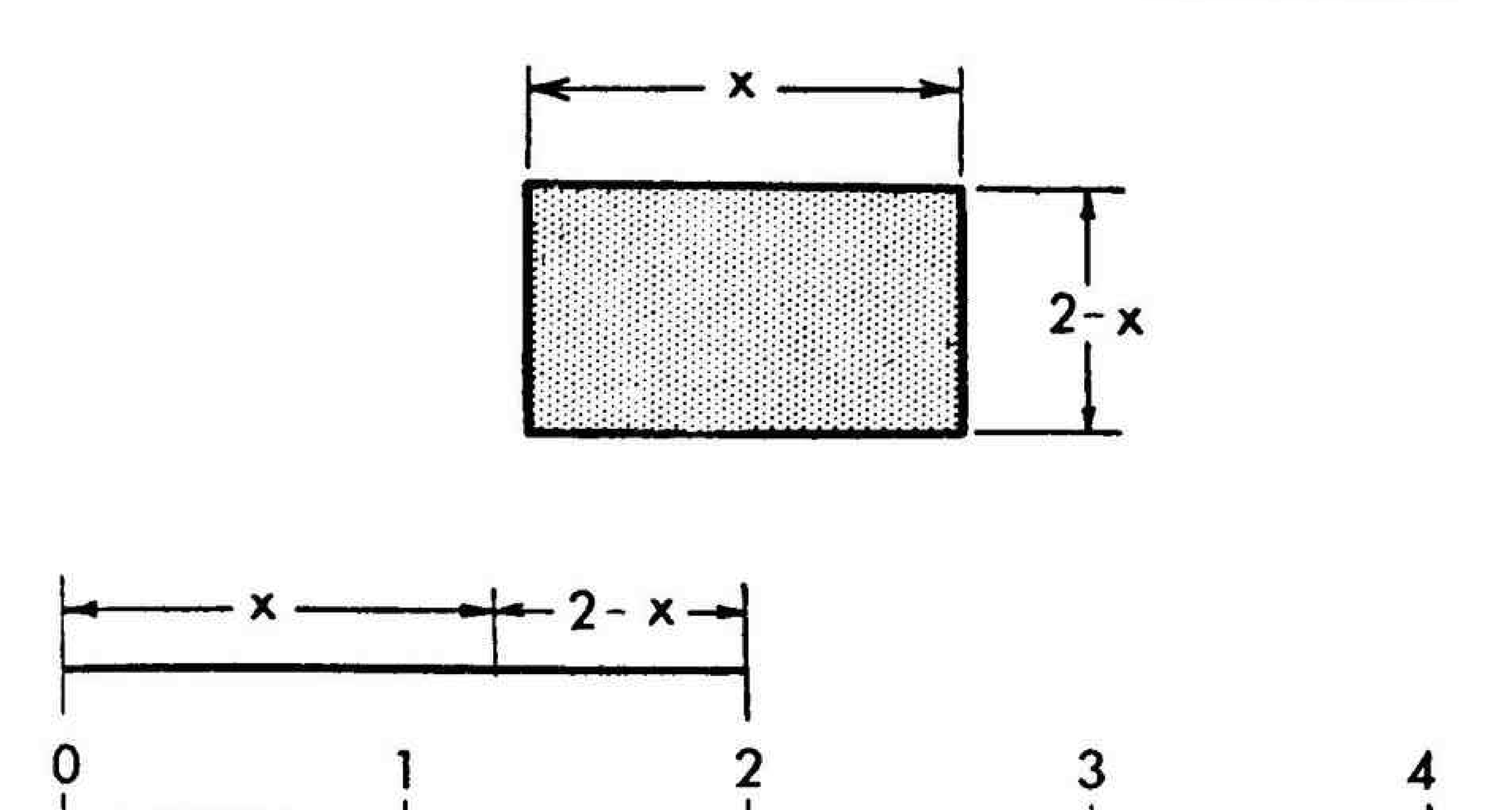


Fig. 121. Usando la escala, el perímetro del rectángulo es, evidentemente, igual a 4 unidades.

será: $x(2 - x)$. Si el lado x aumenta en un pequeño incremento E, el lado $2 - x$ tendrá que disminuir en E a fin de que el perímetro se mantenga constante. La nueva superficie será entonces: $(x + E)(2 - x - E)$. Ya que el área original era máxima, esta ligera alteración en la relación de los lados puede haber producido sólo un ligero cambio en el área. Así, considerando las dos áreas *aproximadamente* iguales, tenemos:

$$x(2 - x) = (x + E)(2 - x - E)$$

de donde: $2x - x^2 = 2x - x^2 - Ex + 2E - Ex - E^2$.

Restando: $2x - x^2$ de ambos miembros de esta ecuación y factorizando:

$$0 = 2E - 2Ex - E^2$$
$$0 = E(2 - 2x - E)$$

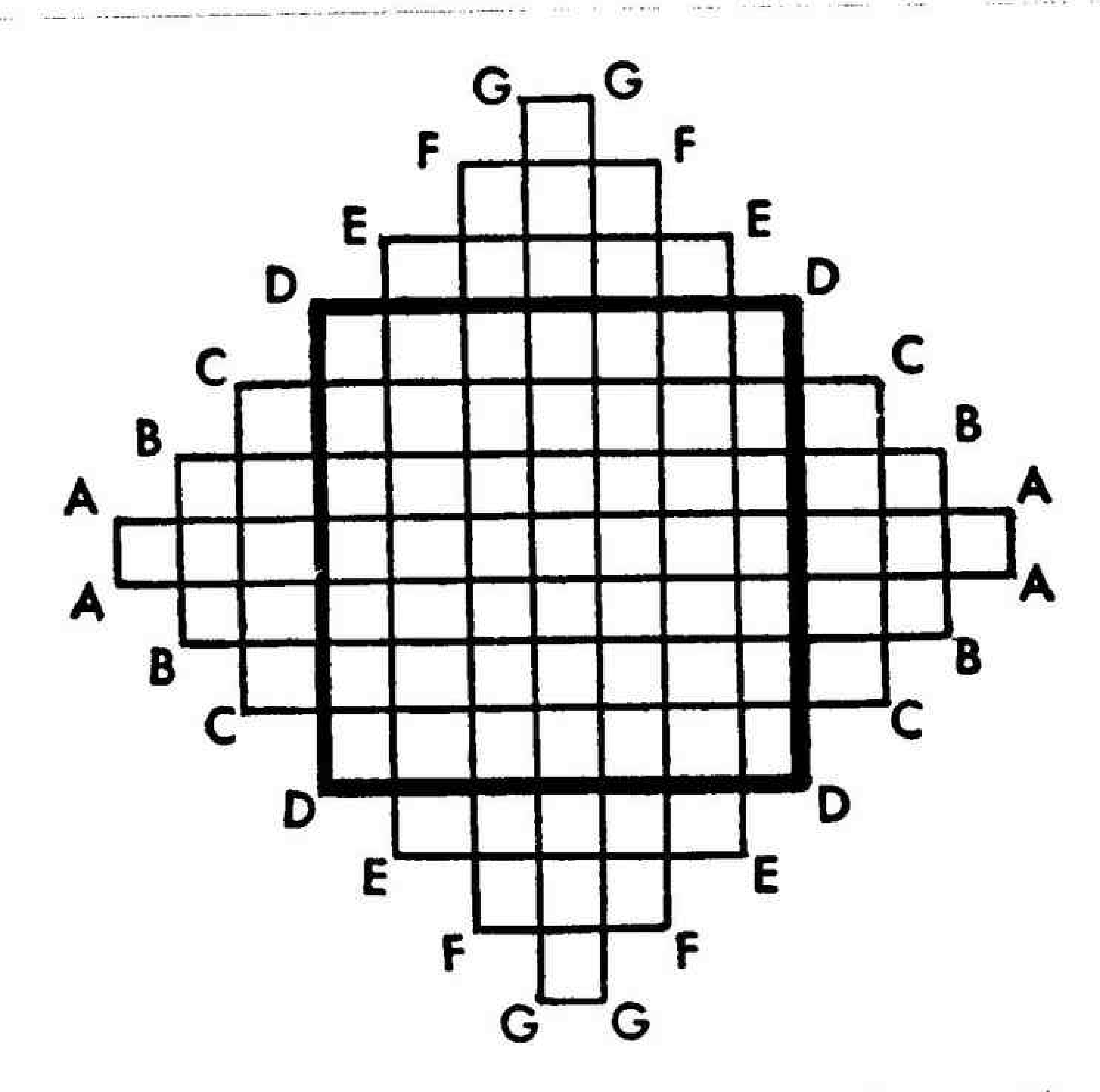


Fig. 122. El perímetro de cada uno de los siete rectángulos: *AAAA*, *BBBB*, *CCCC*, etc., es el mismo. Pero, evidentemente, el rectángulo de área máxima es el cuadrado *DDDD*.

Pero E *no* es igual a cero, por lo tanto el otro factor $(2 - 2x - E)$ debe ser igual a cero:

$$0 = 2 - 2x - E.$$

A medida que se toman para E valores más y más pequeños (es decir, a medida que el rectángulo modificado se aproxima más y más al rectángulo máximo original), la expresión situada a la derecha de la ecuación se acerca más y más a la expresión que se obtiene haciendo $E = 0$, o sea $2 - 2x$. Resolviendo esta ecuación:

$$0 = 2 - 2x$$

encontramos que: $x = 1$; o, en los términos del problema original: el rectángulo de área máxima es un cuadrado.

Es conveniente notar que el área del rectángulo es una función de las longitudes de los lados y que esta función puede representarse gráficamente mediante una curva (figura 123).

El punto más alto de esta curva se encuentra en $x = 1$. Éste es el *máximo* de la función. Para emplear una analogía aproximada, podemos suponer que ya que este punto no está ni "cuesta arriba" ni "cuesta abajo", una bola de acero se mantendría en equilibrio, o bien podría una regla sostenerse

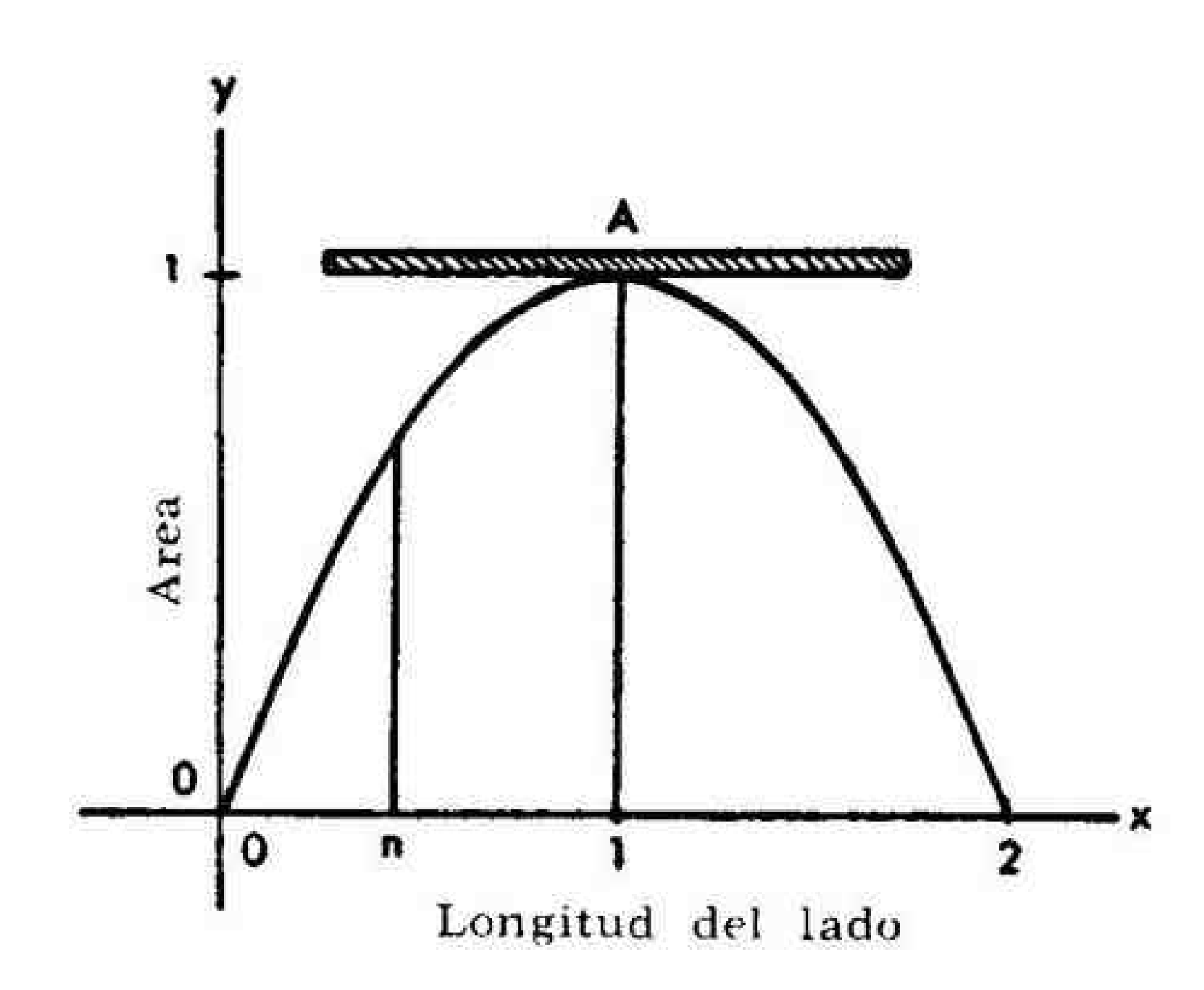


Fig. 123. Esta curva es una parábola que representa las áreas de todos los rectángulos cuyo perímetro tiene una longitud igual a 4 unidades. Levántese una perpendicular en cualquier punto n del eje de las x, que llegue hasta la curva. La longitud de esta perpendicular será el área del rectángulo, uno de cuyos lados es igual a n. El área máxima corresponde al punto A de la gráfica, es decir, a la perpendicular levantada por $x = 1$. De este modo el rectángulo de área máxima, con perímetro $= 4$, tiene un lado $= 1$ y es, por lo tanto, un cuadrado.

horizontalmente, apoyándose en ese punto. Si imaginamos una línea recta, "que se mantiene en equilibrio" en este punto, dicha línea se conoce como la *tangente a la curva*[2]. El hecho interesante es que la tangente a la curva en sus puntos máximos y mínimos, será *siempre horizontal* (fig. 124). Volveremos más adelante a tratar este concepto, tan importante en el cálculo.

Sir Isaac Newton y el barón Gottfried Wilhelm von Leibniz comparten el mérito, en la historia de las matemáticas, de haber descubierto, independientemente, el cálculo diferencial e integral. Sus antagónicas reclamaciones a tal honor dieron lugar a una controversia que apasionó a Europa durante más de un siglo. Esta monumental invención, hecha simultáneamente por estos hombres, se recomienda ahora, por sí misma, a nuestra atención.

Una tenue llama, encendida por Arquímedes y sus predecesores, resplandeció con inigualable fulgor en el clima intelectualmente hospitalario del siglo XVIII, para proyectar su luz

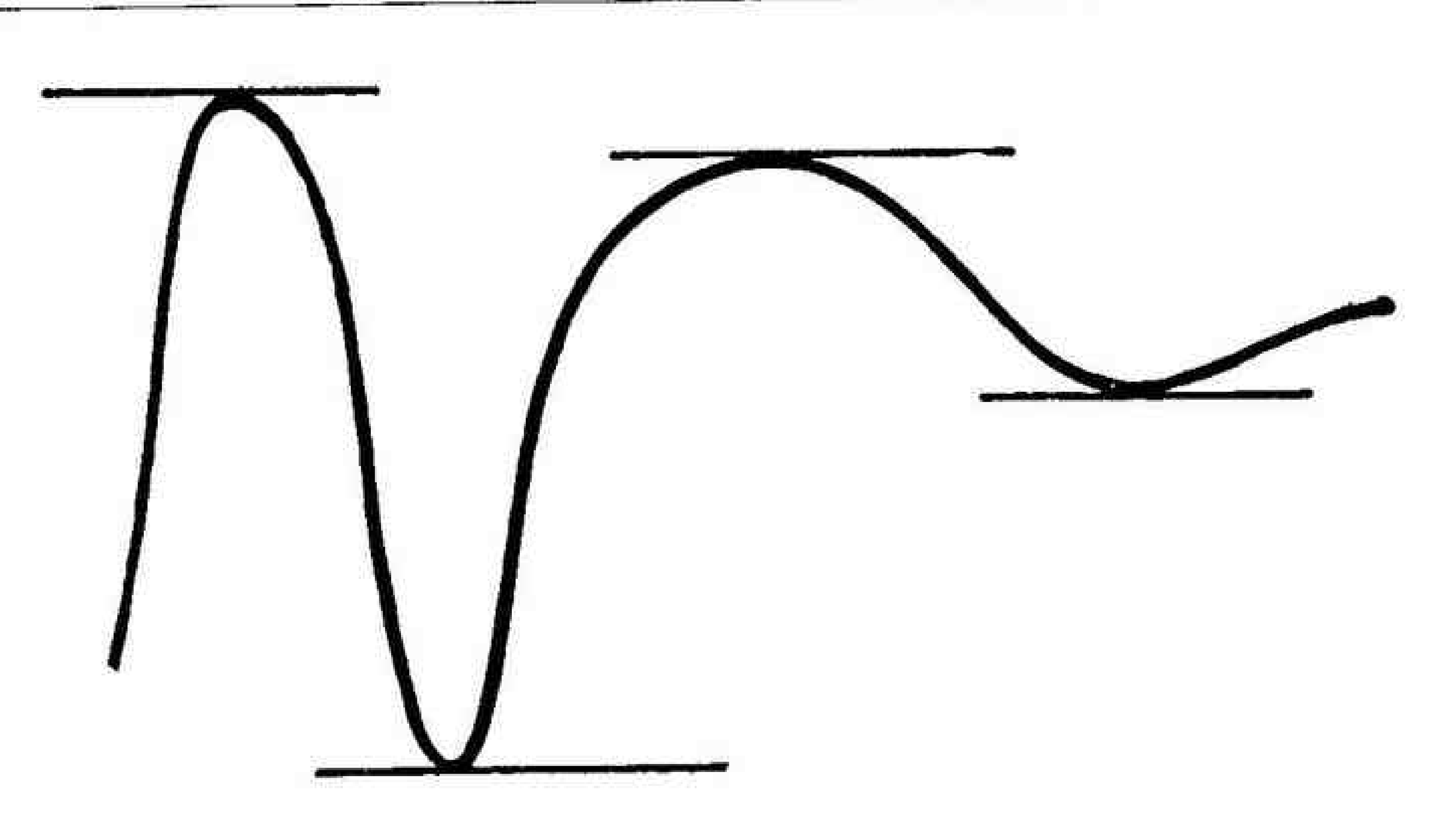


Fig. 124. Las líneas horizontales son tangentes en los máximos y mínimos relativos de la curva.

sobre todo el futuro de la ciencia. El fecundo concepto de *límite* reveló sus plenos poderes, por vez primera, en el desarrollo del cálculo diferencial.

Estamos ya familiarizados con el *límite de una cantidad variable*. La sucesión de los números 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, ..., converge al valor límite 1. La serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ converge al valor límite 2. Ni tampoco dejan de sernos familiares los ejemplos geométricos. Si se inscribe un polígono regular en un círculo, la diferencia entre el perímetro del polígono y la circunferencia del círculo puede hacerse tan pequeña como se quiera con sólo tomar un polígono de suficiente número de lados. La figura límite es el círculo, el área límite, el área del círculo.

En estos ejemplos no hay dificultad alguna para determinar el límite; sin embargo, esto es la excepción y no la regla. Por lo general, se requieren formidables procedimientos matemáticos para determinar el límite de una cantidad variable. Consideremos esto: Trácese un círculo de radio igual a la unidad; inscríbase en él un triángulo equilátero. En este triángulo inscríbase otro círculo; en el segundo círculo, un cuadrado. Continúese con un círculo en este cuadrado y sígase con un pentágono regular inscrito en el nuevo círculo. Repítase este procedimiento, aumentando cada vez, en uno más, el número de lados del polígono regular.

A primera vista, uno podría suponer que los radios de los círculos, que van disminuyendo, se aproximan a cero como valor límite.

Pero no es así; los radios convergen a un valor límite definido, distinto de cero. Como guía explicatoria, sólo debe recordarse que el proceso de reducción mismo, se aproxima a un límite a medida que los círculos y los polígonos inscritos

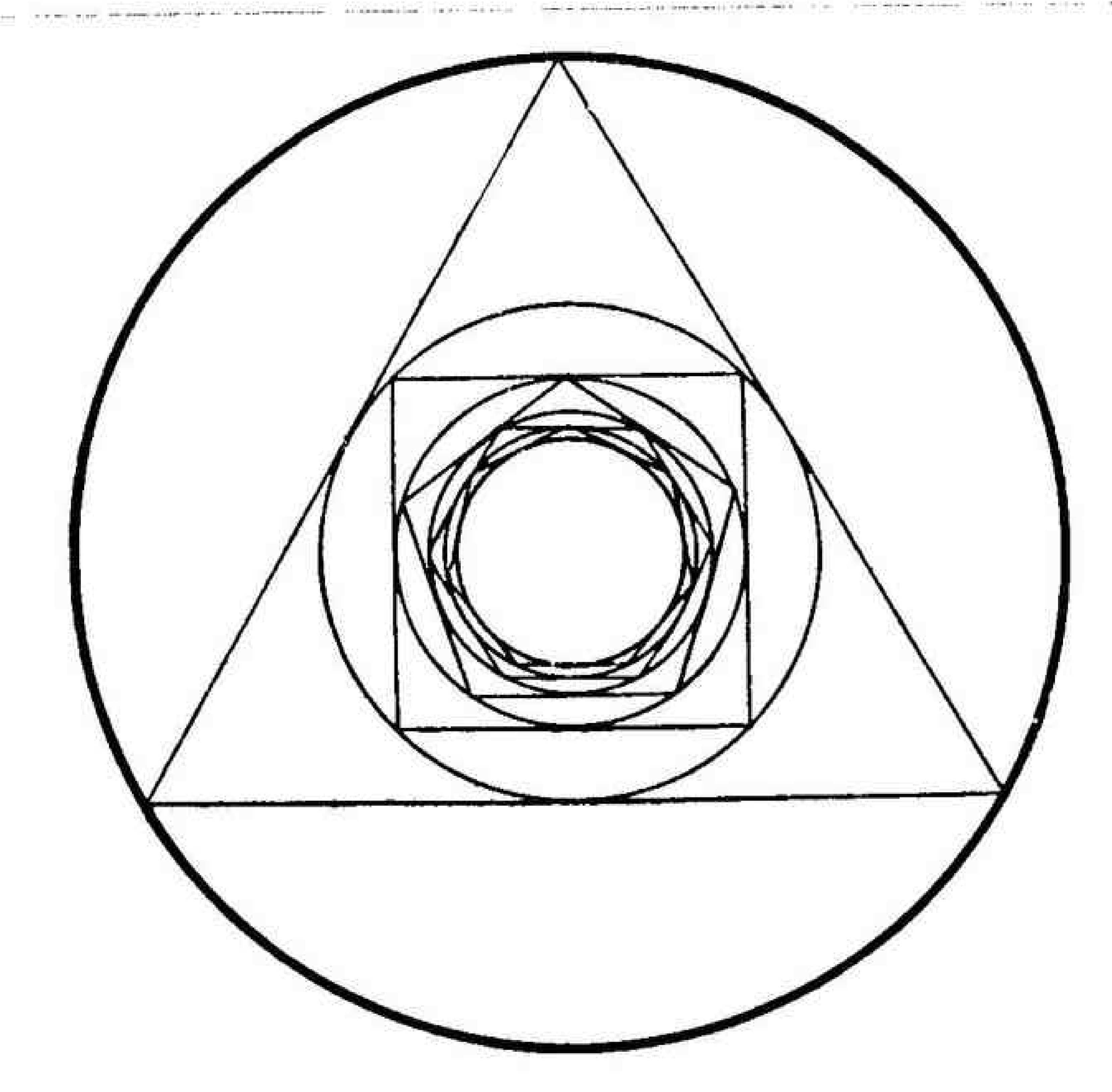


Fig. 125. Los radios, al disminuir, tienden a un límite, que es aproximadamente 1/12 del valor correspondiente al radio del primer círculo.

llegan a ser aproximadamente iguales. El valor límite de los radios está dado por el producto infinito[2]:

$$\text{Radio} = \cos\frac{\pi}{3} \times \cos\frac{\pi}{4} \times \cos\frac{\pi}{5} \times \ldots \times \cos\frac{\pi}{(n-2)}$$

Estrechamente vinculado con este problema, es el de circunscribir los polígonos regulares y los círculos en lugar de inscribirlos.

Aquí parecería que los radios debieran crecer superando todo límite, hasta hacerse infinitos. Esto también es engañoso, puesto que los radios de los círculos resultantes se apro-

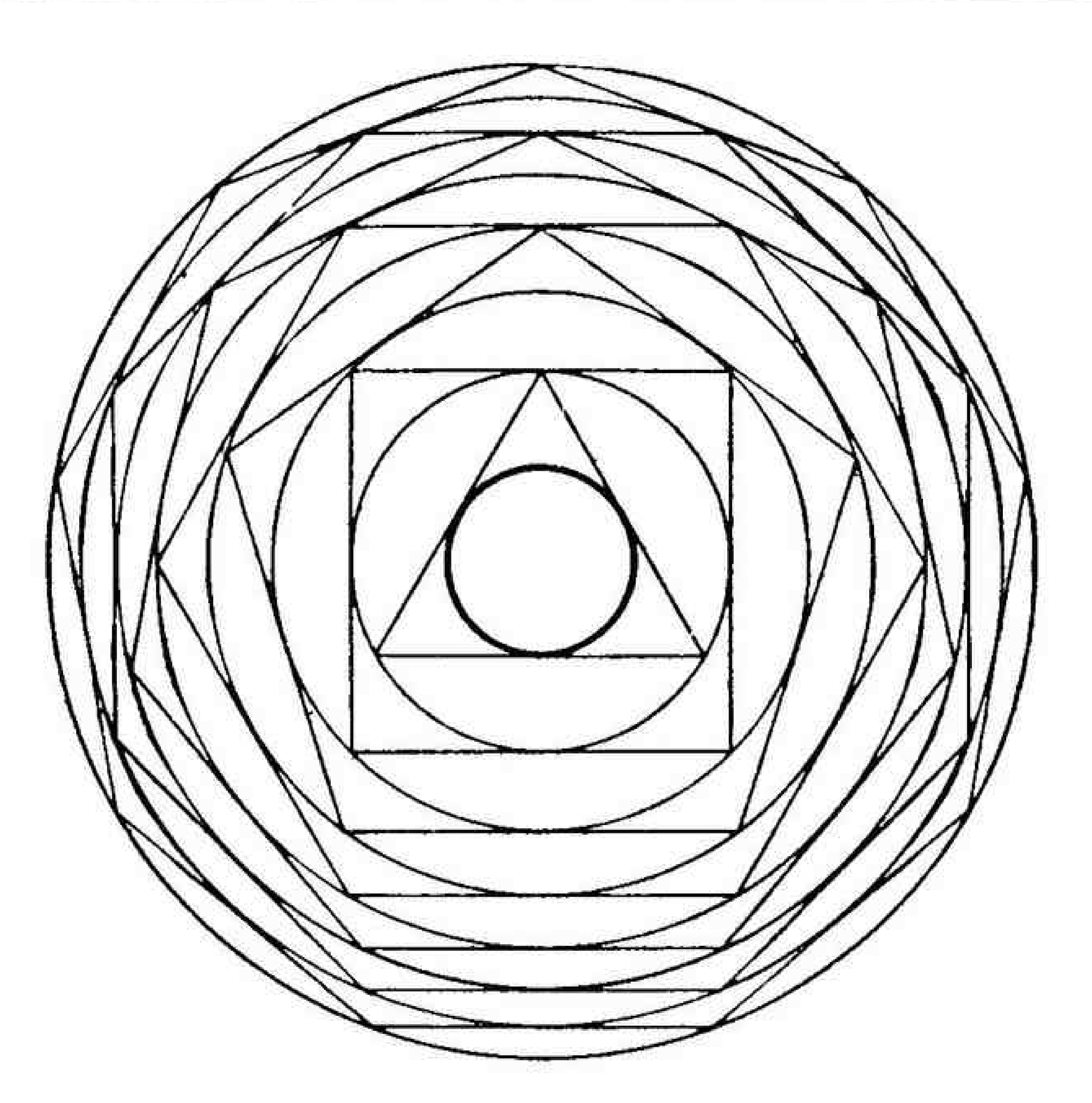


Fig. 126. Los radios, al aumentar, tienden a un límite, aproximadamente 12 veces mayor que el del círculo original.

ximan a un valor límite dado por el producto infinito:

$$\text{Radio} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3} \times \cos\frac{\pi}{4} \times \cos\frac{\pi}{5} \times \ldots \times \cos\frac{\pi}{(n-2)}}$$

Y, lo que es bastante interesante, los dos radios límites están relacionados entre sí de tal manera que uno es el recíproco del otro.

Ya nos hemos ocupado bastante del *límite de una cantidad variable*. Vayamos ahora al *límite de una función*, recor-

dando, someramente, el significado de función*. Se encuentra a menudo, que dos cantidades variables están relacionadas entre sí de tal manera que, a cada valor de una corresponde un valor de la otra. En estas condiciones se dice que las dos cantidades variables son funciones una de la otra, o que se relacionan funcionalmente. Así, la fuerza de atracción (o repulsión) entre dos imanes, es una función de la distancia que los separa. Cuanto mayor sea la distancia entre los imanes, menor será la fuerza; a menor distancia, mayor será la fuerza. Si se hace que la distancia tome valores arbitrarios, se la podrá considerar como una *variable independiente*. La fuerza, entonces, resultará la *variable dependiente*, dependiente de la distancia (y la relación funcional) y queda determinada de manera única, asignando valores a la variable independiente. En las relaciones funcionales, la letra x indica habitualmente la variable independiente, en tanto que la letra y, la variable dependiente. La dependencia "y es una función de x", se escribe simbólicamente:

$$y = f(x)$$

La representación gráfica de un punto ha sido ya tratada en el capítulo sobre *geometría analítica*. La ecuación: $y = f(x)$ determina un valor de y para cada valor de x. Cada par de valores que satisfaga esta ecuación se considera como las coordenadas cartesianas de un punto en un plano; la curva que representa la función está compuesta de todos esos puntos.

Al discutir el concepto de "límite de una función", estudiemos específicamente la función: $y \frac{1}{x}$ representada gráficamente en la figura 128.

* Aunque esto ya lo hemos hecho antes, la noción de función es tan importante, tan frecuente su presencia en las matemáticas, que bien vale la pena volver nuevamente sobre la misma.

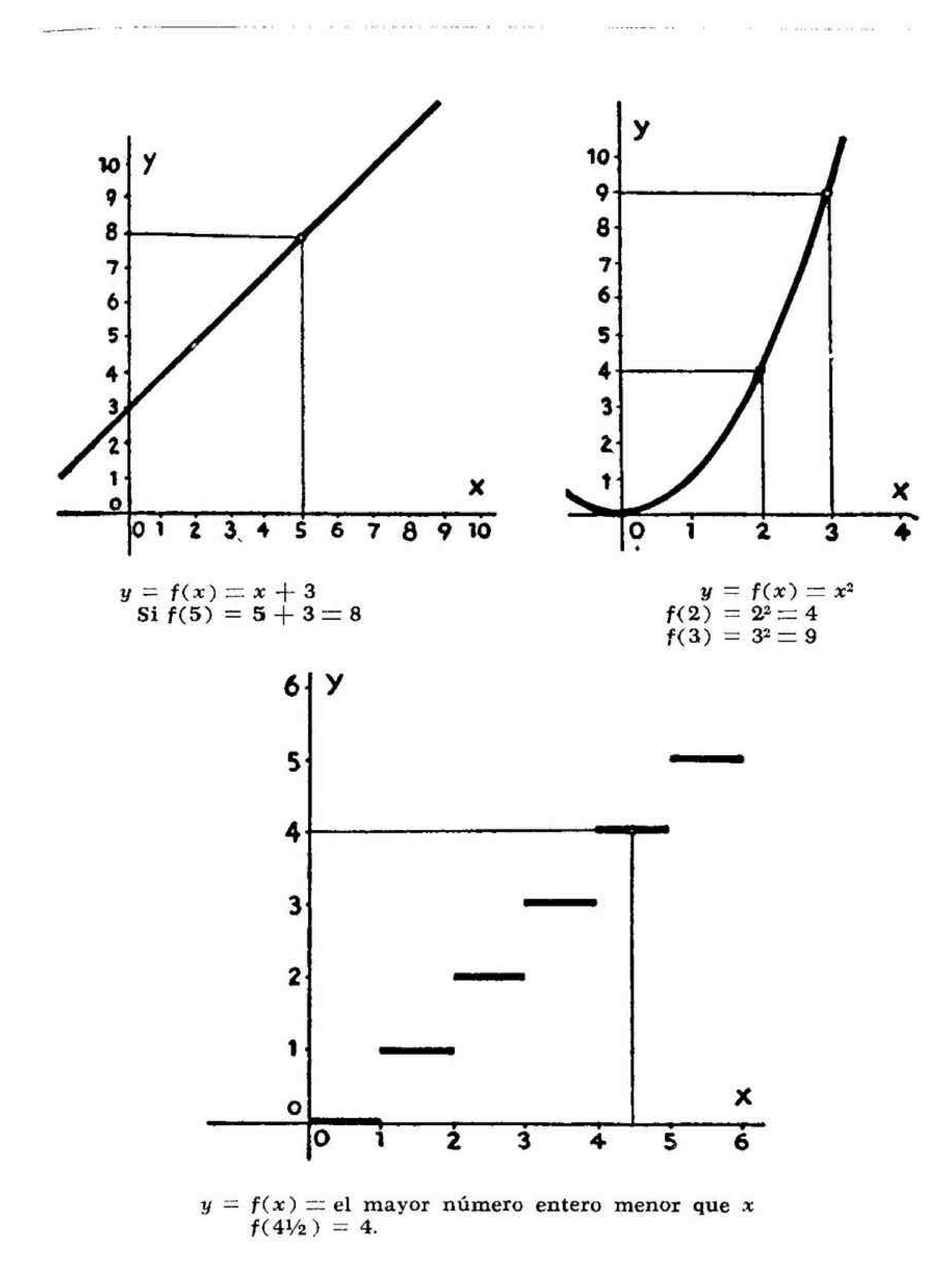


Fig. 127. Representaciones de tres funciones diferentes.

El valor de la función en el punto $x = \frac{1}{2}$ es $y = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Este valor está representado gráficamente por la distancia que media entre la curva y el eje de las x y a $\frac{1}{2}$ unidad a la derecha del origen. Análogamente, el valor de la función en cada punto, a lo largo de la curva, está representado por su distancia desde el eje de las x.

Para la función: $y = \frac{1}{x}$, tómense dos puntos vecinos, $x = \frac{1}{4}$ y, $x = \frac{1}{2}$. A medida que la variable independiente se mueve a lo largo del eje de las x, desde el punto $x = \frac{1}{4}$ has-

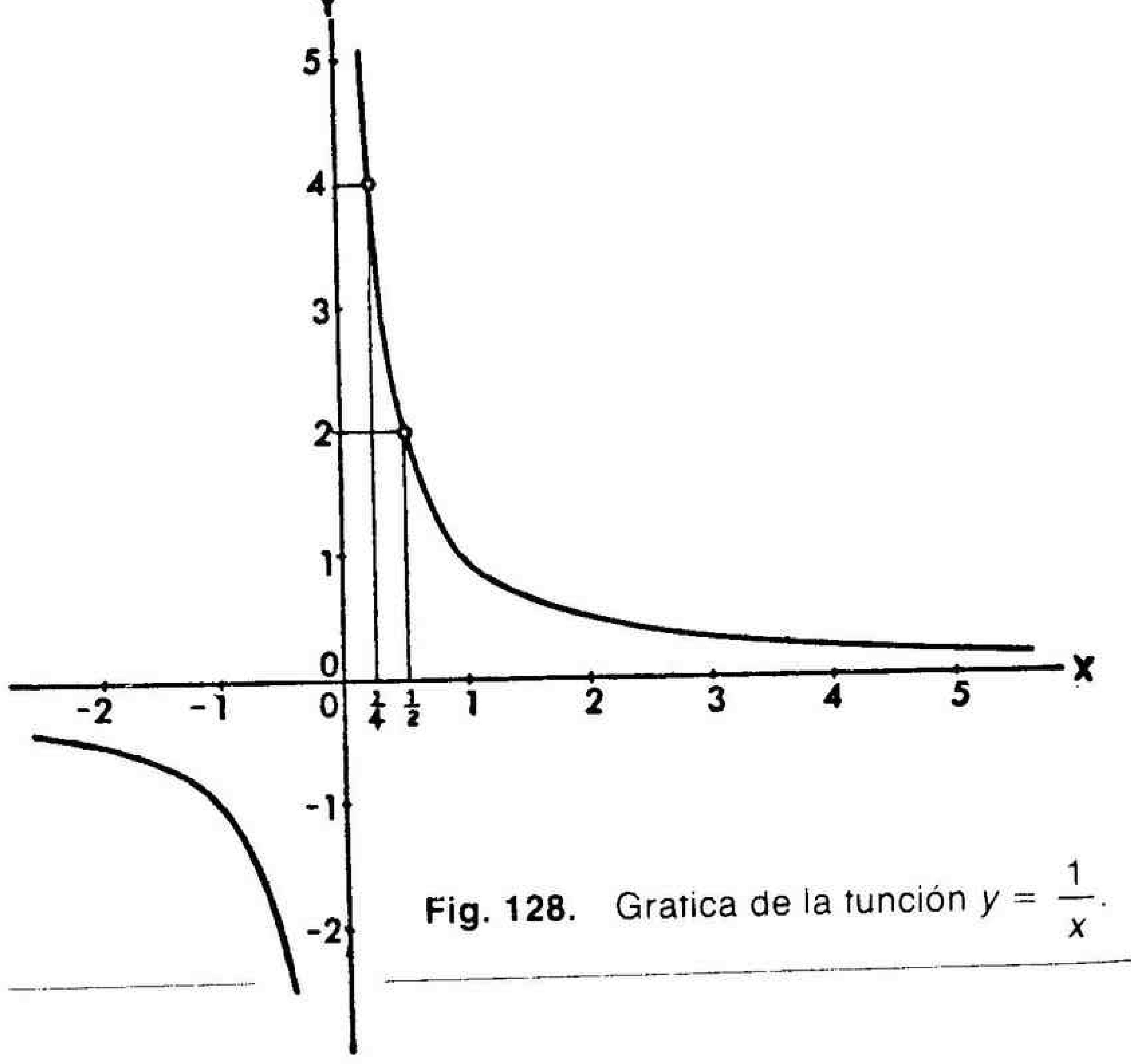


Fig. 128. Gratica de la tuncion $y = \frac{1}{x}$.

ta $x = \frac{1}{2}$, "obliga" a la variable dependiente, a lo largo de la curva, desde el punto $y = f\left(\frac{1}{4}\right) = 4$ hasta $y = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. En otras palabras, a medida que la variable independiente x se acerca al valor $\frac{1}{2}$, considerado como límite, la variable dependiente —la función— se aproxima al valor 2, como límite. Generalizando, a medida que una variable independiente x *se aproxima* a un valor A, su variable dependiente y (la función de x) *se aproxima* a un valor B. De este modo, el límite de $f(x)$, a medida que x se acerca al valor de A, es B. Esto es lo que significa el "límite de una función".

Recordando el ejemplo de la varilla de acero flexionada por el peso, podemos construir un diccionario paralelo de términos:

MATEMÁTICAS	FÍSICA
Variable independiente, x.	Magnitud del peso.
Variable dependiente, y.	Cantidad que se ha curvado la varilla de acero.
Función es la relación entre x y y.	Función es la relación entre el peso y la cantidad que se ha curvado la varilla.
Aumento o disminución de x (es decir: cambio).	Adición o disminución de peso (es decir: cambio).
Aumento o disminución de y (es decir: cambio).	Aumento o disminución en la cantidad que se ha curvado la varilla de acero (es decir: cambio).
Valor límite de y (la función de x) igual a un número.	Valor límite del grado de curvatura (función del peso) igual a la posición.

Teniendo presentes los conceptos de límite, función y límite de una función, queda por definir una idea que comprende a las tres: la de "razón de cambio", o "tasa de variación".

Consideremos la determinación de la rapidez de un cuerpo que se mueve en un instante dado. Se arroja una bomba desde una aeronave estacionaria a una altura de 400 metros. Cuando llega al suelo han transcurrido cinco segundos. Su rapidez media es, pues, $\frac{400 \text{ metros}}{5 \text{ seg}} = 80$ metros por segundo. En consecuencia, el promedio de la razón de cambio de la distancia con respecto al tiempo, es 80. Pero sabemos, sin embargo, de acuerdo a los más elementales conocimientos de física, que un cuerpo adquiere mayor velocidad a medida que cae.

Mientras cae, la bomba no se mueve a una velocidad constante de 80 metros por segundo; la rapidez de su caída varía de punto a punto, aumentando en cada instante sucesivo (despreciando la resistencia del aire). Supongamos, para mayor facilidad, que nos limitamos a considerar la velocidad de la bomba en el preciso momento de chocar contra el suelo. Evidentemente, su velocidad durante el último segundo constituirá una razonable aproximación de la que posee en el instante del choque. La distancia cubierta durante este último segundo es de 144 metros, y la razón de cambio de la distancia con respecto al tiempo es 144. Si ahora tomamos intervalos de tiempo cada vez menores, podemos obtener aproximaciones más y más ajustadas a la velocidad del proyectil en el momento del impacto. En el último medio segundo, la distancia recorrida fue de 76 metros, de modo que la velocidad llegó a ser de 152 metros por segundo. En la tabla siguiente se consignan los intervalos de tiempo, la distancia recorrida en esos intervalos y la velocidad media en cada uno de ellos. Se ve fácilmente que a medida que el intervalo se acerca a cero obtenemos la aproximación a la velocidad del cuerpo en el instante en que golpea en el suelo.

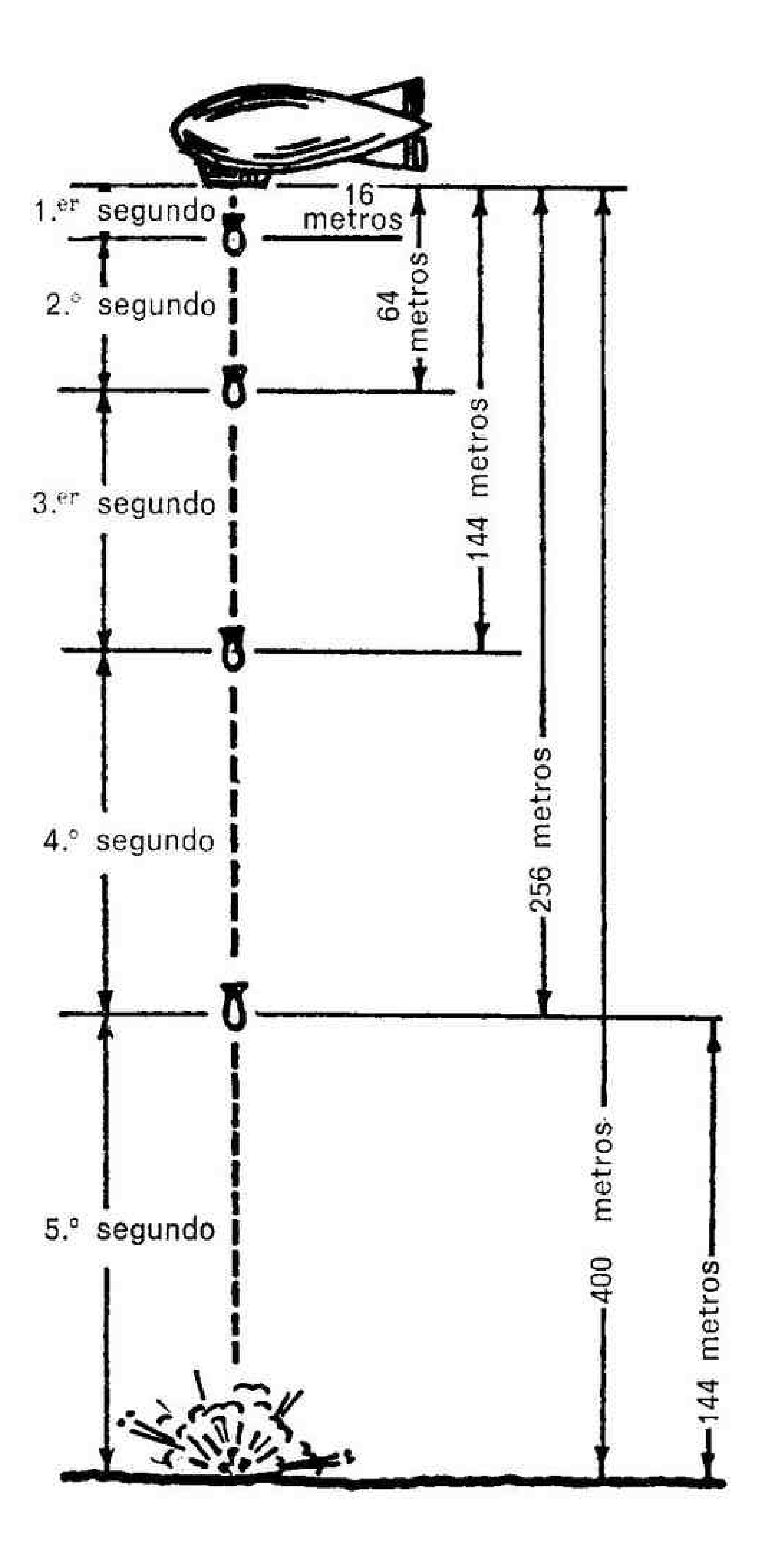


Fig. 129. El dibujo muestra la distancia recorrida por un proyectil que cae, al final del 1.°, 2.°, 3.°, 4.° y 5.° segundos.

Intervalo de tiempo en segundos	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{160}$	$\frac{1}{1600}$	$\frac{1}{16000}$
Distancia recorrida en metros	144	76	39	$19\frac{3}{4}$	$9\frac{15}{16}$	$4\frac{63}{64}$	$2\frac{127}{256}$	$\frac{1599}{1600}$	$\frac{15999}{160000}$	$\frac{159999}{16000000}$
Velocidad media en metros por segundo	144	152	156	158	159	$159\frac{1}{2}$	$159\frac{3}{4}$	$159\frac{9}{10}$	$159\frac{99}{100}$	$159\frac{999}{1000}$

Estas aproximaciones se acercan al valor límite de 160 metros por segundo, que se define como la *velocidad instantánea* de la bomba al tocar la tierra, o, lo que es lo mismo, su razón de cambio de la distancia con respecto al tiempo en ese instante.

Podemos tratar el mismo ejemplo desde un punto de vista algebraico. La distancia recorrida por un cuerpo que cae, está dada por la función: $y = 16x^2$, en la cual y es la distancia y x es el tiempo transcurrido. Partiendo de esta fórmula, con sólo sustituir 5 (segundos) en lugar de x, hallamos que y es igual a 400 metros. ¿Cómo haremos uso de esta fórmula para determinar la velocidad al cabo de cinco segundos? Fijaremos nuestra atención en un breve intervalo de tiempo, antes de que el objeto que cae choque contra el suelo, y en el consiguiente intervalo reducido de distancia recorrido en ese período de tiempo. Llamaremos Δx*, a este pequeño intervalo de tiempo y Δy a la distancia recorrida en ese período. Sabiendo que el valor de Δx ha sido elegido arbitrariamente, el problema consiste en determinar el valor de Δy. Al comienzo del intervalo de la distancia, Δy, el tiempo exacto transcurrido desde que el cuerpo que cae abandonó la aeronave fue de $(5 - \Delta x)$ segundos. La distancia cubierta en el tiempo $(5 - \Delta x)$ segundos, es de $(400 - \Delta y)$ metros. Nuestra relación funcional indica que:

$$\text{Distancia} = 16\,(\text{tiempo transcurrido})^2$$

* Léase "incremento de x" y no "delta veces x", porque Δ es solamente un símbolo, una indicación para efectuar cierta operación, a saber, tomar una pequeña porción de x.

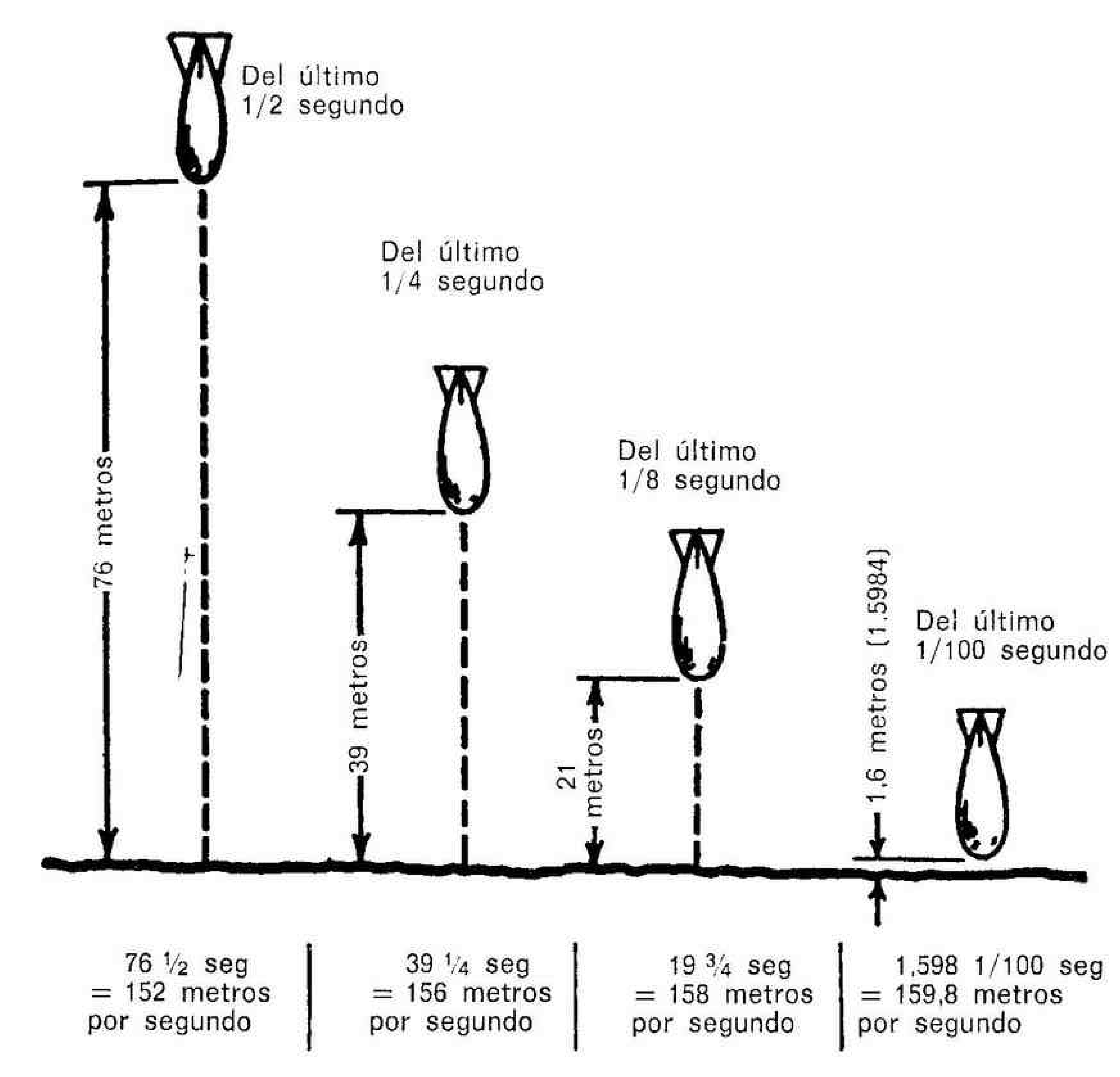


Fig. 130

Así, para toda la caída:

$$400 = 16\,(5)^2,$$

y para el recorrido incompleto

$$(400 - \Delta y) = 16(5 - \Delta x)^2$$

que puede simplificarse así:

$$400 - 16(5 - \Delta x)^2 = \Delta y$$
$$400 - 16(25 - 10\Delta x + \Delta x^2) = \Delta y$$
$$400 - 400 + 160\Delta x - 16\Delta x^2 = \Delta y$$
$$160\Delta x - 16\Delta x^2 = \Delta y$$

La última ecuación de la distancia Δy en términos de unidades de Δx. Para hallar la *velocidad media* durante todo el intervalo de tiempo Δx, debemos formar la fracción:

$$\text{velocidad media} = \frac{\text{intervalo de distancia}}{\text{intervalo de tiempo}}$$

o sea:

$$\text{velocidad media} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{160\Delta x - 16\Delta x^2}{\Delta x}$$

Así:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 160 - 16\Delta x$$

Ahora, a medida que se reduce el intervalo de tiempo Δx, es decir al tomar aproximaciones más y más ajustadas a la velocidad en el instante en que el cuerpo toca el suelo (habiendo transcurrido cinco segundos), el límite de la relación $\Delta y/\Delta x$ ($= 160 - 16\Delta x$), es 160. En otras palabras, a medida que el valor de Δx tiende a cero, la función de Δx (la expresión $160 - 16\Delta x$) se aproxima al valor 160. De este modo, la *velocidad instantánea* al cabo de 5 segundos es de 160 metros por segundo. Indicamos que la razón $\Delta y/\Delta x$ tiende a un límite, escribiendo este valor límite como dy/dx.

En términos técnicos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

que se lee: "El límite de $\Delta y/\Delta x$, a medida que Δx tiende a cero, es dy/dx."

Detengámonos por un instante, para no confundirnos. ¿Qué hemos logrado? Podrá parecer trivial que, con toda la compleja maquinaria a nuestra disposición, sólo hayamos conseguido averiguar la velocidad instantánea de un cuerpo que cae, en el momento en que toca la tierra. Sin embargo, si nuestro éxito es trivial, el movimiento también lo es, porque, ya sea queriéndolo o no, hemos atrapado la flecha de Zenón durante su vuelo y establecido la inmutabilidad de nuestro Universo. Con ayuda de los conceptos de límite y función, hemos hecho comprensible las nociones de cambio y de razón de cambio. *Cambio es una tabla funcional*. A medida que varía un ítem (variable independiente) en un lado de la tabla, su ítem correspondiente (variable dependiente), del otro lado, acusa una variación correlativa. La tasa de variación, es decir, la razón límite de las dos variaciones, se denomina *razón de cambio*. Todas las extravagancias, misterios e incertidumbres indisolublemente ligadas a la idea del movimiento, se disipan de esta manera o, con más propiedad, se transforman en unos pocos aspectos precisos y definibles del concepto de función.

El límite de una función está ejemplificado muy sencillamente por la razón $\Delta y/\Delta x$ cuando Δx tiende a cero. Es fácil ver que $\Delta y/\Delta x$, es una función de Δx; en otras palabras, que esta razón es una función de la variable independiente Δx. A medida que le asignamos valores arbitrarios a Δx, su variable dependiente Δy asume un correspondiente conjunto de valores y, como hemos visto, esa razón tiende a un límite. De ello se deduce que no solamente hemos revelado el significado del límite de una función, sino que ya hemos hecho uso práctico de este concepto.

Ahora es posible definir el proceso fundamental del cálculo

diferencial, calculando el límite de la razón de cambio de una función o, lo que es lo mismo, determinando su *derivada*. Pues, en efecto, la razón de cambio de una función es a su vez una función de esa función y, al obtener al límite de la razón de cambio, es decir a la derivada, llegamos al corazón de la maquinaria de nuestra función primitiva.

Supongamos que se desea determinar la variación de una función, $y = f(x)$ en un punto arbitrario x_0. El cambio promedio de la función $f(x)$ en un intervalo que se extiende desde x_0 hasta $x_0 + \Delta x$ es la diferencia en el valor de la función $y = f(x)$ en los dos puntos extremos, x_0 y $x_0 + \Delta x$, dividida entre la longitud entre estos dos puntos extremos $(x + \Delta x) - x_0$. Así:

$$y_0 = f(x_0)$$

y

$$y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$$

Por consiguiente, un cambio en una función, desde el punto de vista puramente algebraico, está dado por:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

y la *tasa de variación media de una función*, obtenida dividiendo el cambio, Δy, entre la longitud del intervalo en el cual se considera ese cambio, Δx, es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

A fin de obtener mejores aproximaciones a la razón de cambio "instantánea" en el punto x_0, sólo es necesario tomar intervalos más pequeños, es decir, hacer que Δx tienda a cero. A medida que Δx tiende a cero, la expresión: $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

se aproxima, tanto como se quiera a la razón de cambio instantánea en x_0. Así, en el *límite*, cuando Δx tiende a cero, *el cociente* $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ tiende a un valor límite, indicado por dy/dx. Éste es el valor numérico que se llama *derivada de la función* $f(x)$ *en el punto* x_0. Pero ya que x_0 es un punto arbitrario, *puede decirse que la derivada representa la razón de cambio instantánea de una función a medida que la variable independiente pasa por un conjunto completo de valores.*

En obsequio a la claridad, puede resultar útil una interpretación geométrica de la derivada. Cronológicamente, la interpretación geométrica precedió a la analítica. Uno de los problemas principales del siglo XVII consistía en trazar la tangente a una curva en un punto arbitrario. Fue resuelto por el predecesor y profesor de Newton en Cambridge, Isaac Barrow. En base a las investigaciones geométricas de Barrow, Newton desarrolló el concepto de la razón de cambio sobre curvas definidas analíticamente. La íntima relación entre el álgebra y la geometría, resumida por el hecho de que cada ecuación tiene su gráfica y cada gráfica una ecuación, dio sus frutos una vez más. Sea la gráfica de la función $y = f(x)$, en el plano cartesiano, la curva indicada en la figura 131.

Consideremos los puntos P_1 y P_2 de esta curva; sus abscisas están indicadas por x y $x_0 + \Delta x$, donde Δx es la distancia entre la proyección de los dos puntos sobre el eje de las x. Las ordenadas de los puntos P_1 y P_2 están entonces determinadas por la ecuación de la curva y son $f(x_0)$ y $f(x_0 + \Delta x)$, respectivamente.

La pendiente[2] de la recta que une P_1 y P_2 (la tangente del ángulo θ), es precisamente el cociente:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

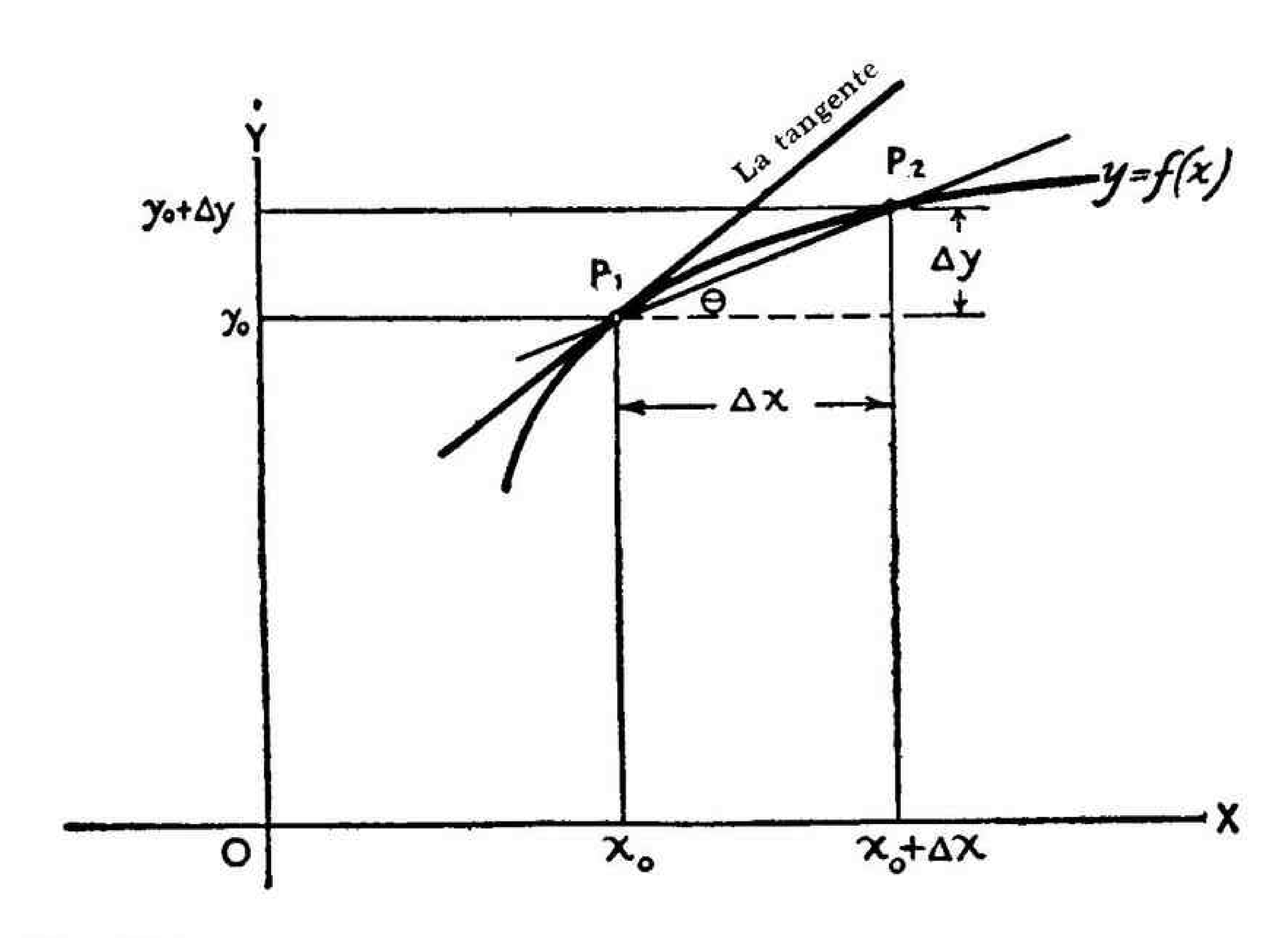


Fig. 131

A medida que Δx *tiende* a cero, el punto P_2 se traslada a lo largo de la curva acercándose al punto P_1 y la pendiente de la recta (el cociente arriba indicado) tiende como valor límite, a la pendiente de la tangente a la curva en el punto P_1. Pero la pendiente de la tangente en ese punto es, numéricamente, igual a $\frac{dy}{dx}\left(\text{ya que } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}\right)$. En otras palabras, la pendiente de la tangente en cada punto, a lo largo de la curva, es idéntica a la derivada en ese punto. O, dicho de otra manera, la pendiente de la tangente a una curva indica la inclinación que toma la curva (es decir, si asciende o desciende) y, de este modo, su razón de cambio. En consecuencia, el equivalente geométrico de la derivada es la pendiente de la tangente.

Podemos ahora volver a recordar nuestra proposición de que los valores para los cuales una función alcanza su máximo o su mínimo, corresponden a los puntos de curva en los cuales la tangente es horizontal. La pendiente de una recta horizontal es, por supuesto, igual a cero. Ya que la derivada es idéntica a la pendiente de la tangente, llegamos a la conclusión de que los valores máximos y mínimos de una función, son aquellos para los cuales la derivada de la misma es igual a cero. De esta manera pueden resolverse muchos problemas interesantes.

El problema que tratamos anteriormente y que consistía en determinar el rectángulo de área máxima para un perímetro dado, cae dentro de esta categoría. Indicábamos con x un lado del rectángulo, el lado adyacente con $(2 - x)$ y el área y, por $x(2 - x)$. Siendo el área una función de x, su derivada será igual a cero cuando la función alcance su valor máximo. Hallar el rectángulo de área máxima por medio del cálculo implica los siguientes pasos: (1) derivar la función, es decir, hallar su derivada; (2) igualar a cero esta derivada; (3) despejar x en la ecuación resultante.

Primer paso

$$y = x(2 - x)$$
$$y + \Delta y = (x + \Delta x)(2 - x - \Delta x)$$
$$(y + \Delta y) - y = (x + \Delta x)(2 - x - \Delta x) - x(2 - x)$$
$$\Delta y = 2x - x^2 - x\Delta x + 2\Delta x - x\Delta x - \Delta x^2 - 2x + x^2$$
$$\Delta y = 2\Delta x - 2x\Delta x - \Delta x^2$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 - 2x - \Delta x$$
$$\text{Límite}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$
$$\text{y } \frac{dy}{dx} = 2 - 2x$$

Segundo paso

$$\frac{dy}{dx} = 2 - 2x = 0$$

Tercer paso

$$2 - 2x = 0$$
$$2 = 2x$$
$$1 = x$$

Se puede comprobar que es el resultado obtenido anteriormente, sin recurrir al cálculo: el rectángulo de área máxima de perímetro 4 es un cuadrado de lado igual a la unidad. Ejemplos más complicados, tomados de la química, la física, etc., son menos sencillos en cuanto a técnica matemática, pero no con respecto a las ideas que encierran.

Al considerar la derivada en cada punto del intervalo sobre el cual está definida, hemos visto que la derivada es, a su vez, una función de la variable independiente. La derivación no necesita detenerse aquí, puesto que la función derivada puede también tener una derivada, la segunda derivada de la función original. La notación empleada para indicar la segunda derivada de $y = f(x)$, es $\frac{d^2y}{dx^2}$. La derivada n-ésima de una función se obtiene derivando la función n veces. Su símbolo es: $\frac{d^ny}{dx^n}$. ¿Qué significan estas derivadas de orden superior?

Habitualmente, suele darse a la segunda derivada una interpretación física y una geométrica. Si la función: $y = f(x)$ representa la distancia recorrida por un cuerpo que cae, en el tiempo x, la primera derivada representa la razón de cambio de la distancia con respecto al tiempo. La segunda derivada es la razón de cambio de la *velocidad* con respecto al tiempo y se la conoce generalmente como la *aceleración* del cuerpo. Para un cuerpo que cae, la distancia (en pies) $y = 16x^2$, debe derivarse una vez para obtener la velocidad y de nuevo, otra vez más, para obtener la aceleración. Los detalles matemáticos de ambas derivaciones son:

(I)

$$y = 16x^2$$
$$y + \Delta y = 16(x + \Delta x)^2$$
$$(y + \Delta y) - y = 16(x + \Delta x)^2 - 16x^2$$
$$= 16(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - 16x^2$$
$$= 16x^2 + 32x\Delta x + 16\Delta x^2 - 16x^2$$
$$\Delta y = 32x\Delta x + 16\Delta x^2$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 32x + 16\Delta x$$
$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{Límite}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = 32x$$

(II)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = 32x$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right) + \Delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = 32\,(x + \Delta x)$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right) + \Delta\left(\frac{dy}{dx}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right) = 32\,(x + \Delta x) - 32x$$
$$\Delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = 32\Delta x$$
$$\frac{\Delta\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\Delta x} = 32$$
$$1)\ \underset{\Delta x \to 0}{\text{Límite}} \frac{\Delta\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\Delta x} = \frac{d^2y}{dx^2}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 32$$

La segunda derivada es una constante, el número 32 (32 $pies/seg^2$ = 9,81 m/seg^2), que se denomina la aceleración de la gravedad terrestre de un cuerpo que cae y es debida a la atracción terrestre. Expresa el hecho notable de que cualquier cuerpo, prescindiendo de su masa, al ser arrojado desde una altura de 16 pies (4,905 metros) sobre el suelo (y haciendo caso omiso de la resistencia del aire), llegará a él en un segundo, moviéndose a una velocidad de 32 pies por segundo (9,81 *m/seg*) en el instante del choque.

Veamos ahora la interpretación geométrica de la segunda derivada. Para curvas dibujadas en el plano, en cada punto, la *curvatura* es directamente proporcional a la segunda derivada. Para determinar la curvatura de un arco dado, dibujamos el círculo que mejor se adapte a ese arco.

El radio de ese círculo es el *radio de curvatura* y su valor recíproco, la *curvatura*.

Veamos cómo se aplica, por ejemplo, a la línea recta. La curvatura de una línea recta es igual a cero. Cualquier función cuya gráfica sea una línea recta, tiene una ecuación de la forma: $y = mx + b$, donde m y b son constantes.

La derivación da: $dy/dx = m$. Cuando se deriva m, su razón de cambio o derivada es igual a cero, ya que m es una

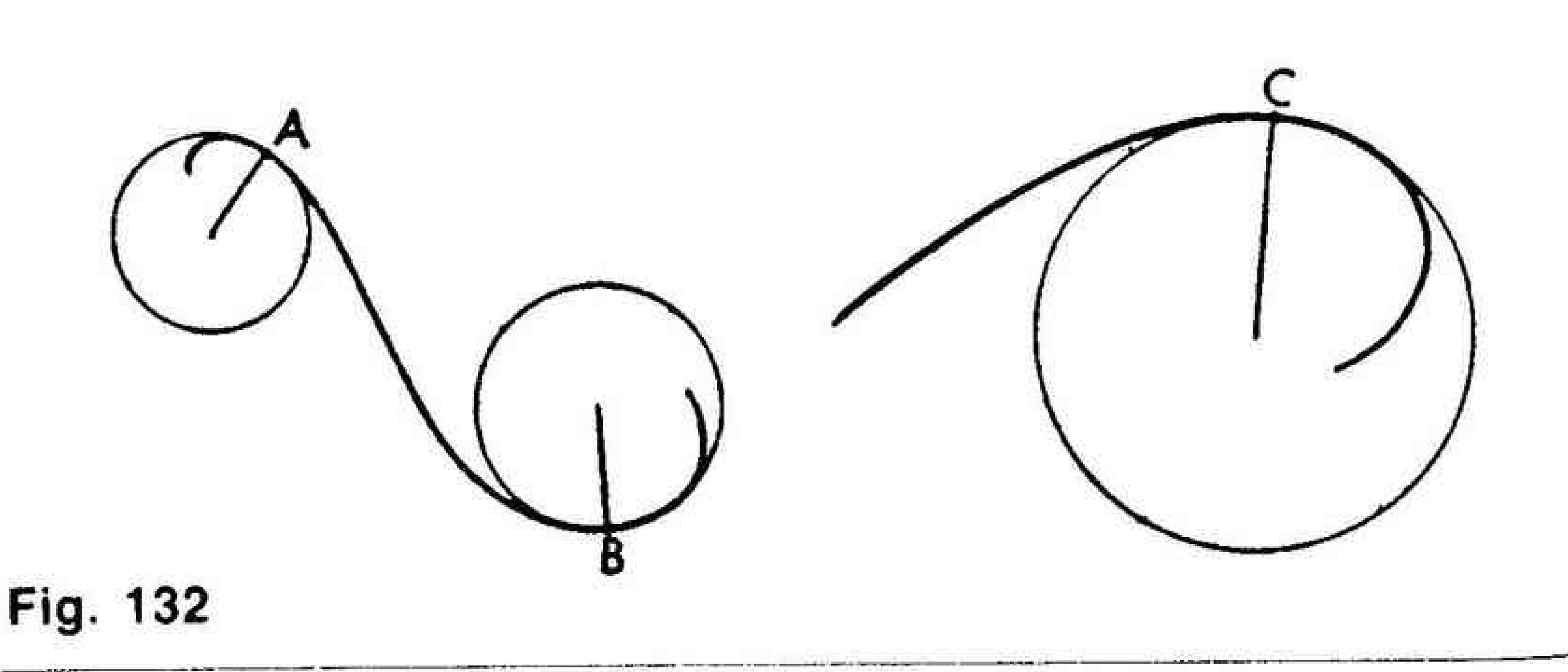


Fig. 132

constante. De este modo, la primera derivada nos indica que la pendiente de una línea recta es constante y la segunda derivada, que su curvatura es nula.

No existen interpretaciones físicas o geométricas, simples, de la tercera, cuarta y demás derivadas. Las derivadas de orden superior aparecen, sin embargo, en muchos problemas de física. A los ingenieros de automóviles les interesan mucho las derivadas terceras porque les informan acerca de la calidad de marcha de un coche. Los ingenieros civiles, que se ocupan de la elasticidad de las vigas, la resistencia de las columnas y todos los aspectos de la construcción donde aparecen esfuerzos de corte y compresión, necesitan las derivadas primera, segunda, tercera y cuarta; existen otros innumerables ejemplos en los campos de las ciencias físicas y las aplicaciones estadísticas a las ciencias sociales.

Los problemas resueltos por el cálculo integral tienen su origen en una época muy anterior a los del cálculo diferencial. Pero esto no quiere decir que los recursos matemáticos usados en uno de ellos precedieran a los del otro, pues los conceptos de límite, función y límite de una función, *tal como aparecen en el cálculo*, fueron desarrollados al mismo tiempo para sus dos ramas. Pero el tipo de problema que el cálculo integral trata de resolver es más fácil de proponer y, por lo tanto, no es sorprendente encontrar en los escritos de los matemáticos griegos problemas que hoy identificamos como pertenecientes a la integración.

Mucho más sorprendente es la estrecha relación que existe entre las dos divisiones del cálculo, el cálculo diferencial y el cálculo integral. Una cosa es determinar la razón de cambio de una función o la pendiente de la tangente a una curva y otra, que parece ser de un orden totalmente distinto, calcular el área limitada por una curva. Por maravilloso que pueda

parecer el eslabón entre estas dos investigaciones, aparentemente inconexas, es secundario con respecto a la satisfacción que experimenta el matemático ante el carácter complementario de tan poderosos recursos.

"La cuadratura del círculo" había desafiado a los matemáticos griegos. Otro aspecto de este problema, quizá no tan bien conocido, pero de igual importancia, es la rectificación del círculo. Consiste en la determinación de la longitud de la circunferencia de un círculo, en función de la longitud de su radio. A pesar de que nunca pudieron vencer al círculo, domaron, parcialmente, a la parábola. En esto, como en otras cosas, lo hicieron con su fecundo ingenio. Lograron, con

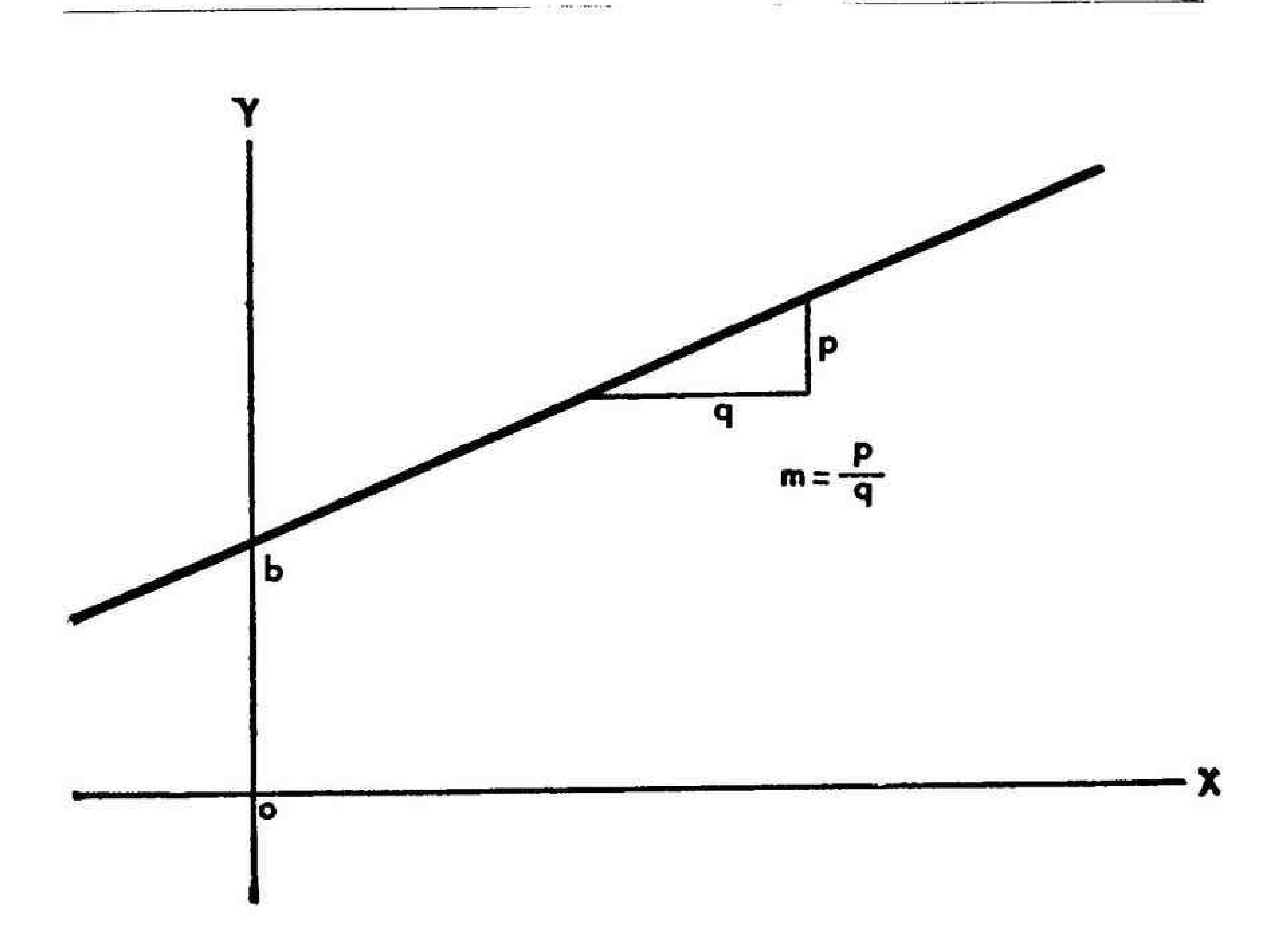


Fig. 133. Representación de la ecuación: $y = mx + b$.

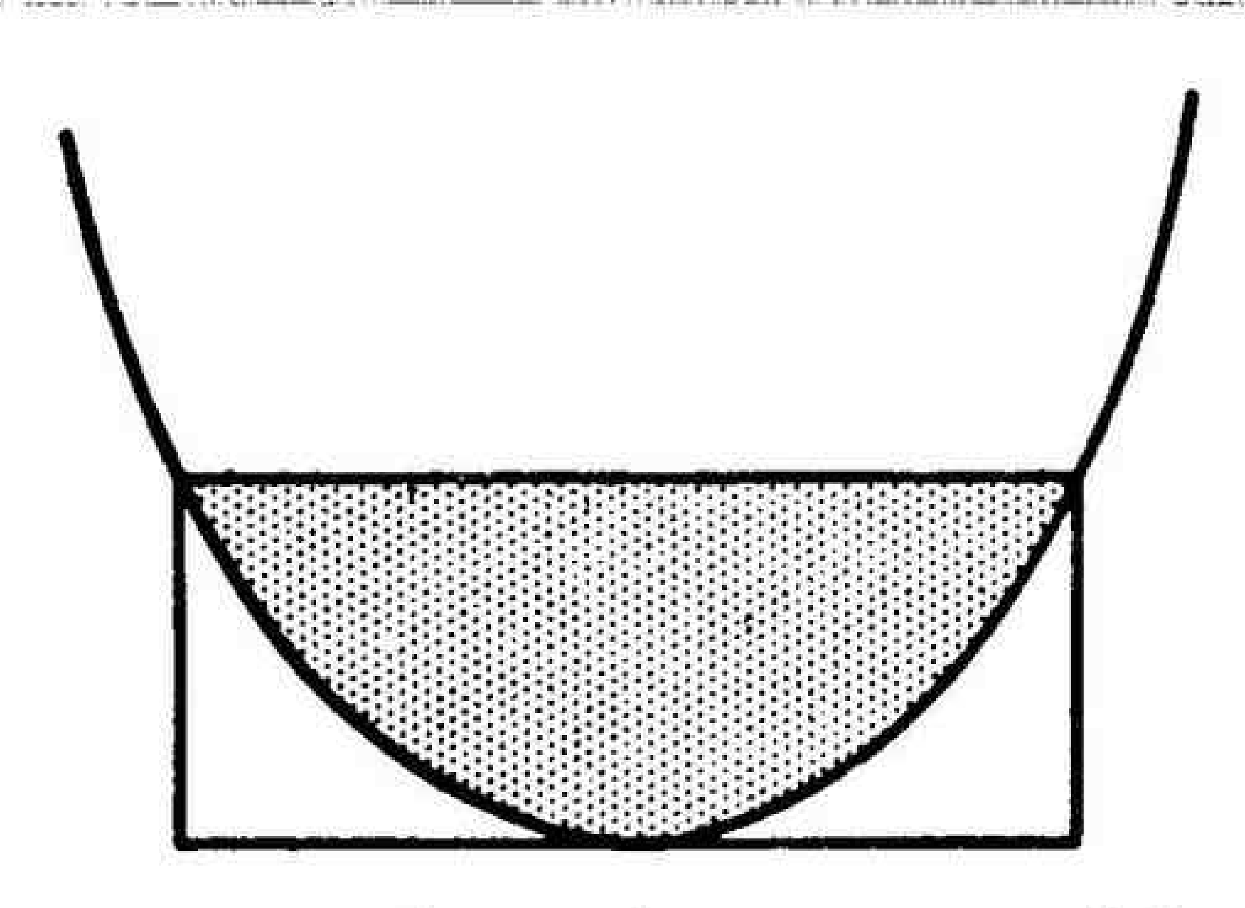


Fig. 134. Cuadratura de la parabola. La superficie sombreada es igual a 2/3 del área del rectángulo.

métodos profundamente hermosos, la cuadratura de la parábola*, pero no pudieron rectificarla[3].

La exposición de sus métodos revelaría más del genio de Arquímedes que de la teoría general del cálculo integral. Indudablemente el plan de Arquímedes fue anticipo de la técnica del cálculo, pero en los siglos comparativamente estériles que siguieron, la semilla que plantó no alcanzó a germinar. Hasta la aparición de Kepler, no se registró tentativa alguna de tratar sistemáticamente la determinación de áreas y volúmenes de figuras curvilíneas. Es triste consignar que su incentivo no fue la sed de aprender, sino las necesidades comerciales de la industria de apagar la sed. "Kepler fue llevado, en un principio, a hacer sus cálculos... con el deseo de mejorar los métodos imperfectos, que entonces se utilizaban, para calcular el contenido de los toneles de vino y de otras vasijas. Al comprar vino, observó que los vendedores de este producto determinaban el contenido de los barriles introduciendo una varilla de medir a través de la boca del tonel has-

* La cuadratura de la parábola, como ya lo hemos visto, consiste en calcular el área limitada por un segmento parabólico y una línea recta

ta las duelas opuestas, sin tener en cuenta la curvatura. Haciendo girar alrededor de su eje la sección longitudinal del barril, se obtendría un cuerpo de volumen igual al del tonel. El plan de Kepler fue dividir dichos sólidos de revolución en un infinito número de partes elementales y sumarlas y, en su *Stereometria*, aplica este método a unos noventa casos especiales. Kepler consideró a los arcos infinitamente pequeños como segmentos rectilíneos, a los rectángulos planos infinitamente estrechos, como líneas y a los cuerpos infinitamente delgados como planos. El concepto de las magnitudes infinitamente pequeñas que manejaba era aquel que los antiguos habían eludido, por lo general, pero que poco después serviría de base al método de Cavalieri[4]."

Tal vez convendría destacar, a esta altura de nuestra exposición sobre el cálculo, que toda referencia al infinito, ya sea pequeño o grande, ha sido cuidadosamente eludida. Gracias a Weierstrass, supo dominar al "fantasma" infinitesimal, el cálculo se asienta firmemente sobre fundamentos comprensibles, y no metafísicos, como límite, función y límite de una función. Nada impide hacer extensivos estos conceptos al cálculo integral. En realidad, la eliminación de lo infinitamente pequeño es más importante aún para el cálculo integral que para el diferencial. Fue precisamente este refinamiento del pensamiento el que elevó al cálculo a la categoría de ciencia exacta.

La obra de Cavalieri marcó rumbos nuevos por su mayor generalidad, merced a un método más abstracto que el de Kepler. Uno de los teoremas principales todavía lleva su nombre. Si dos sólidos tienen la propiedad de que al ser cortados por planos sus áreas quedan en proporción constante, sus volúmenes estarán en la misma proporción.

La cuestión inicial, pues, para calcular las áreas delimitadas por curvas, estuvo en vías de solución tan pronto la rudimentaria maquinaria lo hizo posible. Sin embargo, la disposición de la maquinaria era inadecuada para el cálculo de la longitud de una línea curva. Se requería, en consecuencia, un artificio diferente.

Todos los problemas sencillos, en matemáticas, participan de un rasgo común: no se puede anticipar qué dificultades pueden ocultar. Por cierto, que nada parece más fácil que medir la longitud de una línea. Tómese una hoja de papel y márquense en ellas dos puntos. Si se unen estos dos puntos con una línea recta, todo lo que se necesita para determinar su longitud, es una regla graduada. Ni siquiera necesitamos desviarnos por el mal camino al que nos conduciría el raciocinio filosófico: Qué medios se emplearán para medir la longitud de la regla; qué medios se emplearán para medir la varilla de medida que medirá la regla, etc. Se admite que podemos medir la longitud de una línea recta. Supongamos, sin embargo, que unimos los dos puntos con una curva; hallar su longitud es un asunto completamente distinto. Una manera de

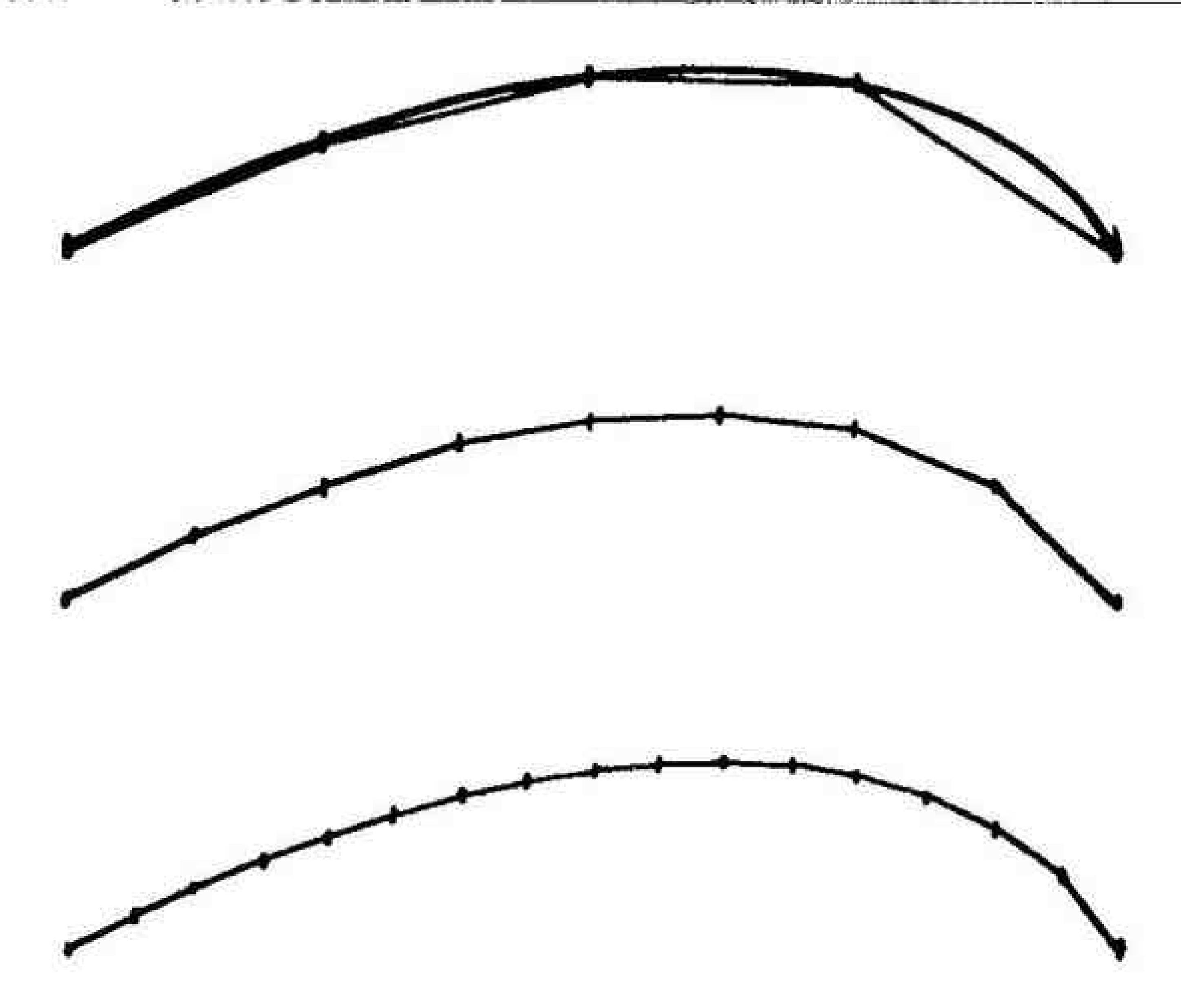


Fig. 135. Aproximándose a la longitud de una curva mediante segmentos rectilíneos.

hacerlo sería tomar un trozo de cordel, adaptarlo a lo largo de la curva, luego sacarlo y medir su longitud con una regla. Pero esto nos lleva al punto de partida, porque parece que las únicas líneas que podemos medir son las rectas. En efecto, para medir la longitud de una línea curva es totalmente necesario "rectificarla".

Ahora bien, podrían sugerirse otros medios para medir las curvas. Se ha recurrido con frecuencia, principalmente en este capítulo, a métodos de aproximación. De este modo, podemos dividir al arco en un gran número de partes pequeñas y unir los puntos extremos de los pequeños arcos con líneas rectas. La suma de las pequeñas líneas rectas diferirá de la suma de los pequeños arcos en menos de lo que difiere una línea recta de la longitud de toda la curva.

En otras palabras, la suma de las longitudes de las pequeñas líneas rectas se aproximará a la longitud de la curva. Eligiendo un número suficientemente grande de tramos rectos (cada uno de ellos, muy pequeño) lograremos hacer que la suma de sus longitudes difiera de la longitud de la curva tan poco como se quiera. Cuanto más numerosas son las pequeñas rectas, tanto más exacta será la aproximación.

Si concebimos que el número de líneas rectas aumenta indefinidamente, puede decirse que su suma tiende a un límite, la longitud de la curva. Tratemos de formular esto en función de límites, y de límites de funciones.

Supongamos que $y = f(x)$ es la ecuación de la curva que une los dos puntos A y B en un plano cartesiano. Subdividamos a la porción de eje x, situada bajo la curva, en n partes iguales. La abscisa del punto inicial A es a_0; la abscisa del punto siguiente será a_1; del tercer punto, a_2 y así sucesivamente, de manera que la abscisa del último punto, o sea B, es a_n. La diferencia entre dos valores adyacentes de x la indicaremos con Δx, la diferencia entre dos valores adyacentes de y (obtenida levantando perpendiculares de los valores adyacentes sobre el eje de las abscisas) es Δy. En la figura 136, cada par de puntos elegidos sobre la curva, acota a una hipotenusa de un triángulo rectángulo sombreado, cuya base es Δx y cuya altura es Δy. Así, la hipotenusa de cada uno de estos triángulos será una aproximación a la longitud de esa porción de curva que la limita. Se deduce que la suma de las hipotenusas de todos los pequeños triángulos, se aproxima a la longitud de la curva. Aplicando el teorema de Pitágoras, se obtiene fácilmente el valor de cada hipotenusa. Aumentando el número de subdivisiones, las aproximaciones serán más exactas. Así, a medida que Δx tiende a cero, es decir a medida que se hacen más pequeños los intervalos tomados a lo largo del eje x, la suma de las hipotenusas de los triángulos rectángulos tiende a un límite, que es la longitud de la curva. Debe notarse que la longitud de cada pequeña hipotenusa es una función de su correspondiente Δx.

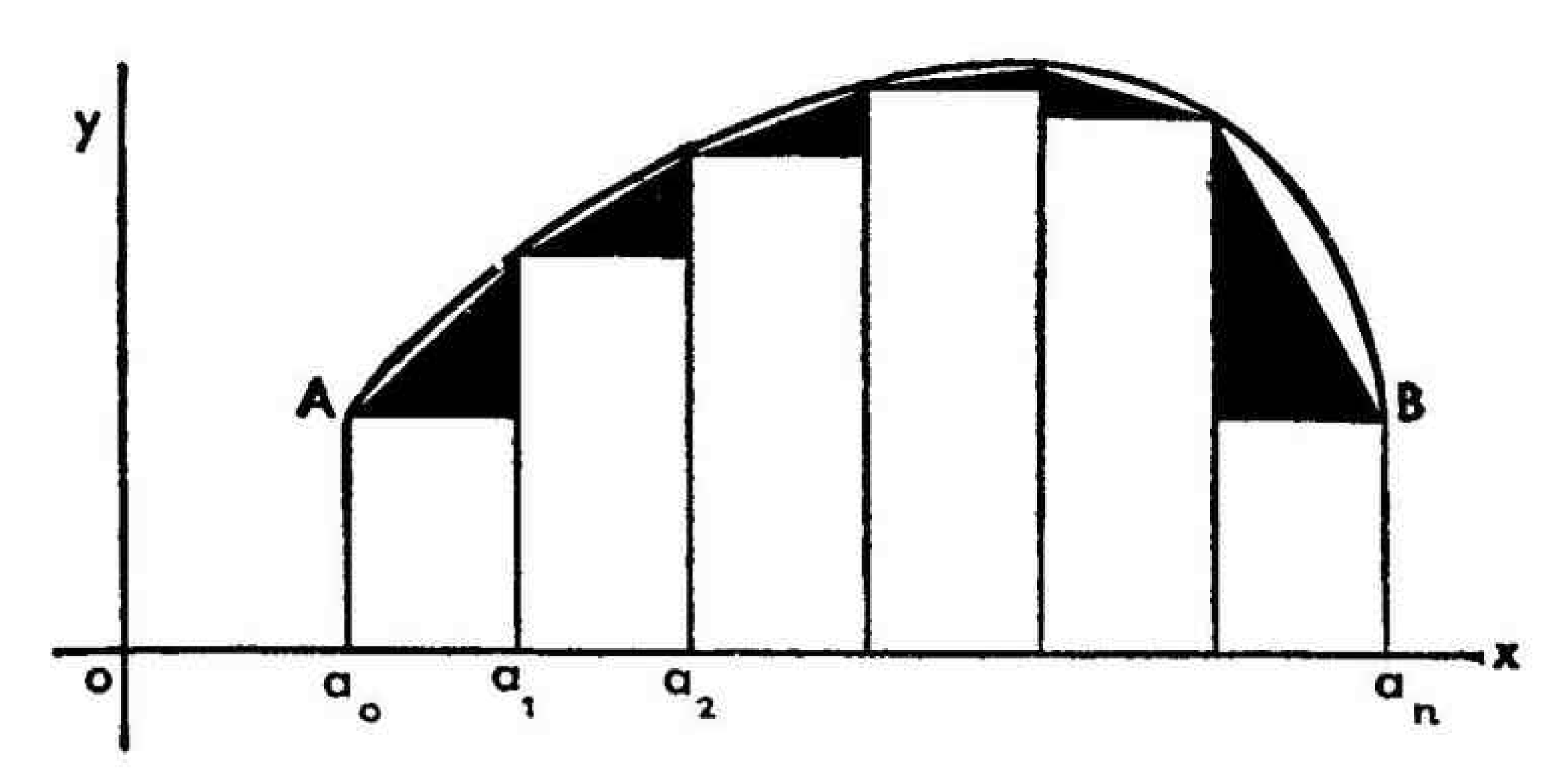


Fig. 136. Aproximándose a la longitud de una curva mediante las hipotenusas de triángulos rectángulos. La base de cada triángulo es Δx y su altura Δy.

Podemos volver ahora a la determinación del área limitada por una curva, pues es en este problema donde los con-

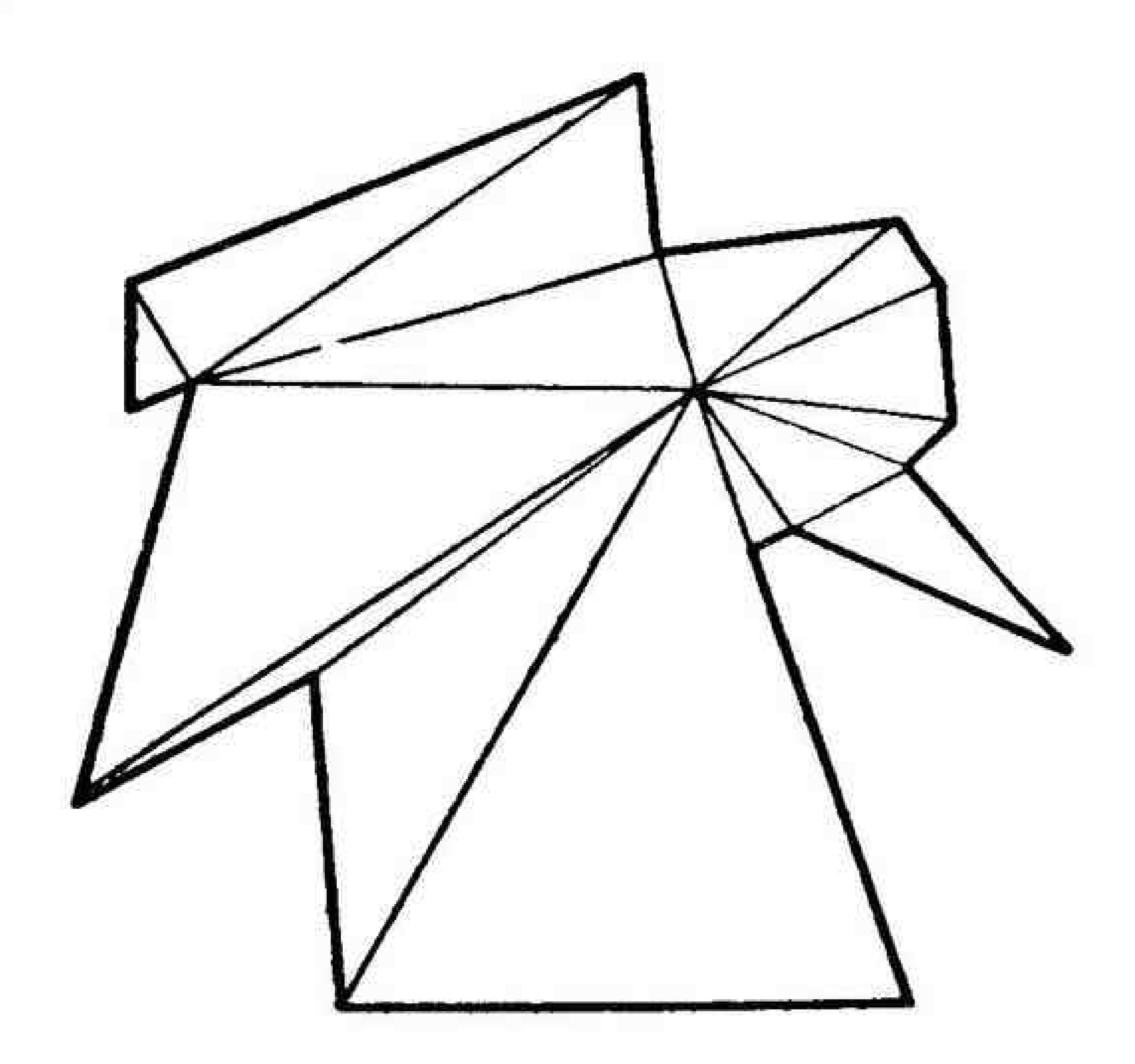


Fig. 137. Se determina la superficie de este polígono irregular, formando los triángulos indicados y calculando el área de cada uno de ellos.

ceptos del cálculo integral fueron expuestos por primera vez.

Calcular el área de una figura limitada por líneas rectas, por irregular que sea, es comparativamente fácil. Sólo se necesita trazar líneas auxiliares que dividan a la figura original en cierto número de triángulos. Sumando las áreas de estos triángulos se obtiene la superficie de la figura dada.

Cuando la frontera de una figura no es recta sino curva, este procedimiento es inadecuado y debe recurrirse, nuevamente, a la imaginación. Si dividimos los lados curvos de la figura en un gran número de partes, uniendo sus puntos extremos con líneas rectas, exactamente como lo hicimos antes, la figura resultante, un polígono acotado por lados rectilíneos, tiene un área que puede determinarse por medios elementales. Aumentando el número de lados del polígono, puede hacerse diferir su área del área de la figura original, tan poco como se quiera, y obtener, así, una aproximación tan perfecta como se pida.

Pero un medio más efectivo de dividir a una figura curvilínea, consiste en valerse de rectángulos. Precisamente, este artificio fue inventado por Arquímedes. En la figura 138 vemos, por ejemplo, un círculo dividido en fajas rectangulares. De acuerdo al método de construcción de estas fajas, se verá que puede obtenerse no sólo una sino dos aproximaciones. La primera da el área de los rectángulos inscritos en el círculo y la segunda, la de los circunscritos. La discrepancia entre ambas superficies de rectángulos disminuye a medida que aumenta el número de ellos, en otras palabras, a medida que disminuye la anchura de los mismos. Su límite común, a medida que la superficie interior aumenta y la exterior disminuye, es el área del círculo.

En lugar de limitamos a este ejemplo especial, si tratamos el problema general de determinar el área encerrada por un

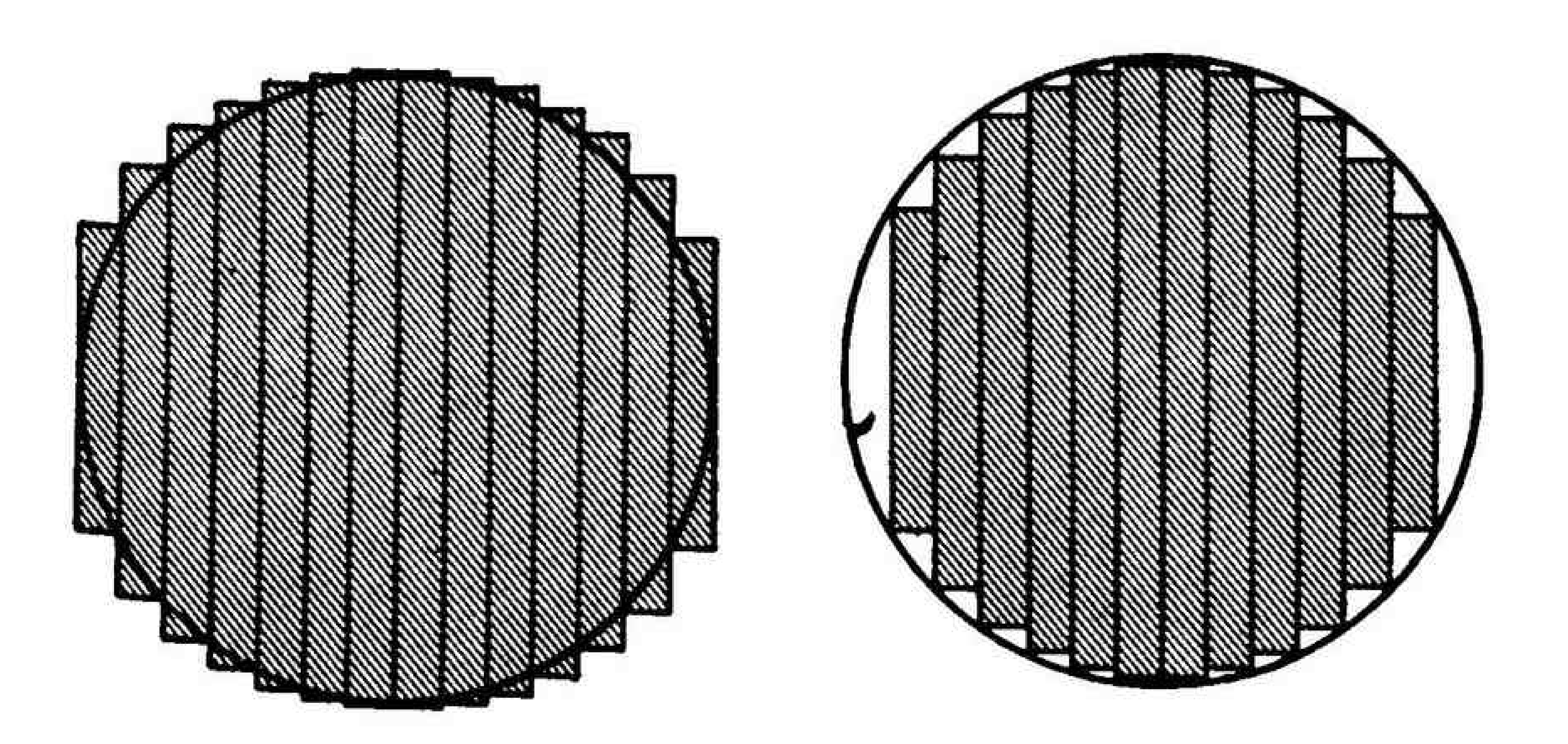


Fig. 138. Aproximación del área de un círculo mediante rectángulos.

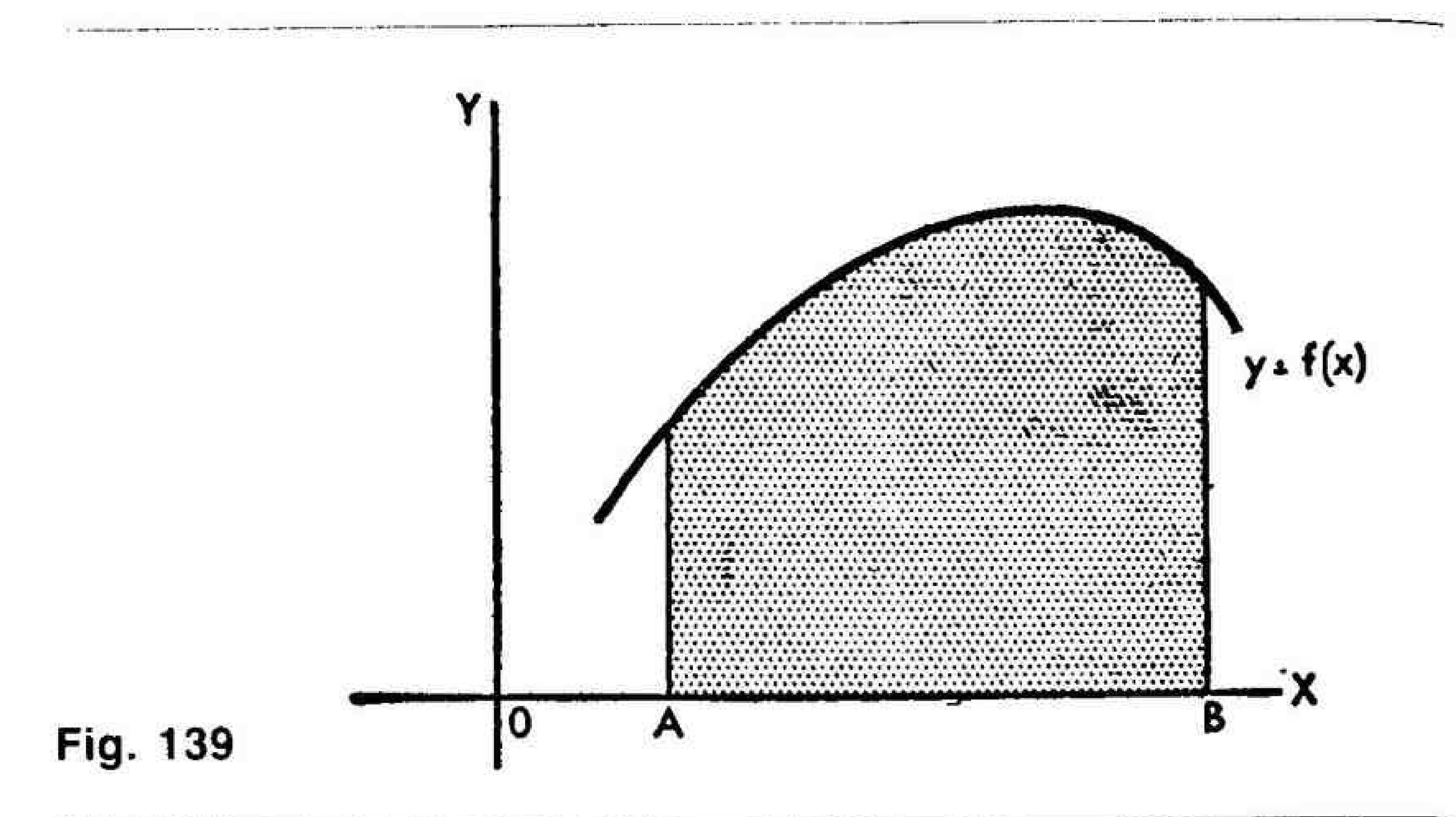


Fig. 139

segmento de una curva arbitraria, el método que acabamos de describir, puede, quizás, aclararse más. Deseamos hallar el área de la sección sombreada de la figura 139. La misma está limitada, en su parte superior, por la curva $y = f(x)$, en la parte inferior por el segmento del eje de las x que va de $x = A$ a $x = B$, y a la derecha y a la izquierda, por dos rectas paralelas al eje de las y. Dividamos al eje de las x en n partes iguales, como en la figura 136. Levantemos una perpendicular a dicho eje en cada uno de los puntos de la división, que llegue hasta la curva. En cada punto donde una perpendicular corte a la curva, tracemos una línea horizontal hasta las verticales contiguas. Para cada pequeña subdivisión del eje de las x habrá dos rectángulos, uno por debajo de la curva y el otro sobresaliendo de la misma y conteniendo a parte del área exterior. Consideremos un rectángulo típico (véase la fig. 140).

El área del rectángulo más pequeño *ABCD* es igual al producto de la base *AB* por la altura *AD*, siendo la altura el valor de la función en el punto inicial del subintervalo *A*; el área del rectángulo más grande *ABEF* es el producto de la

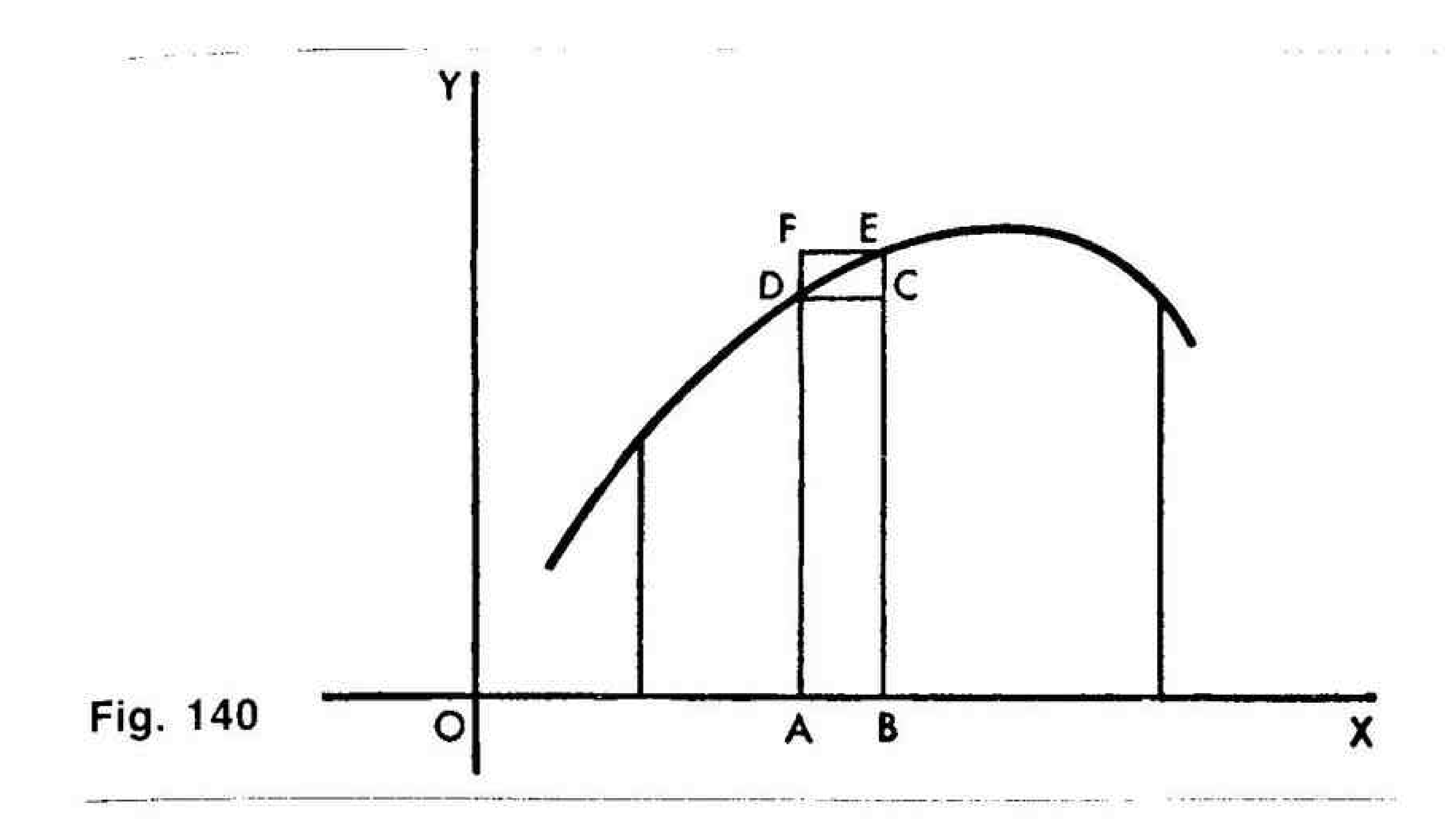


Fig. 140

misma base por la altura *BE*, la cual es el valor de la función en el punto terminal del subintervalo *B*. El área encerrada por la curva queda comprendida entre las áreas de estos dos rectángulos. Se obtiene una excelente aproximación del área buscada, tomando el valor *promedio* del área de ambos rectángulos.

Repitiendo este proceso para cada subintervalo y tomando la suma de las áreas de los rectángulos promedio, se obtiene una aproximación de toda el área encerrada por la curva. Valiéndonos, una vez más, del concepto de límite, puede verse que a medida que aumenta el número de subintervalos tomados sobre el eje de las x, la suma de las áreas correspondientes, tiende, necesariamente, al área de la figura sombreada (fig. 139). En el límite, esta suma de los muy pequeños elementos de área se denomina, *la integral definida de la función $y = f(x)$ entre los valores de $x = A$ y de $x = B$*, y con la notación de Leibniz se indica:

$$\int_A^B f(x)dx$$

Resumiendo brevemente: cada uno de los subintervalos sobre el eje de las x es Δx, que es la base de cada una de las pequeñas áreas rectangulares. La altura del rectángulo promedio está representada por una recta perpendicular trazada desde un punto interior, característico, del intervalo Δx a la curva. Su valor es, por supuesto, $f(x)$. El área de cada uno de dichos rectángulos promedio es: $f(x) \cdot \Delta x$, y la suma de estas áreas es la suma de todos esos productos. Con el simbolismo técnico el área límite se escribe: $\int_A^B f(x)dx$, donde dx, reemplaza a Δx ya que $\Delta x \rightarrow 0$.

Nuestra interpretación de la integral definida es que representa a un área. Atribuirle ese significado es siempre posible, pero existen integrales de ciertas funciones que tienen, además, un significado físico distinto. Esto se debe principalmente a que la integral definida es un número, una *suma*, además de un área. Todas las veces que, en la ciencia, se sume una función hasta el límite, la integral definida desempeña un papel. Una de las conquistas del cálculo integral ha sido la determinación del *momento de inercia* de todos los sólidos. Una vez más, es a la integral definida a la que los ingenieros civiles deben estar agradecidos, puesto que el puente Golden Gate, por ejemplo, depende más de ésta que del hierro y del hormigón. Resistir los esfuerzos de nuestras gigantescas presas, con sus caras curvas e irregulares, supone otro problema de integración de funciones. Determinando la presión del agua en un punto arbitrario y sumándola en todo el paramento del dique, queda determinada la fuerza total. El baricentro, es decir el centro de gravedad de una figura plana o de un sólido, se determina fácilmente por medio del cálculo integral cuando se aplica a la función particular que define esa figura y podrían multiplicarse indefinidamente ejemplos semejantes.

Más allá del concepto de integral definida, con sus múltiples usos y su extraordinario campo de aplicación, está la noción de *integral indefinida*, cuyo valor intrínseco para el matemático es aún mayor. Su principal interés teórico consiste en que nos permite comprobar la asombrosa relación existente entre la derivada y la integral.

Consideremos la función $y = f(x)$. En lugar de limitar el intervalo, como lo hicimos antes, de $x = A$ a $x = B$, imaginemos que se extiende desde $x = A$, hasta $x = x_0$, donde x_0 puede asumir *cualquier* valor. Para diferentes valores de x_0, la integral definida tomará, también, diferentes valores. En realidad, no estamos considerando ya un área limitada, sino que disponemos de todo lo necesario para formar una tabla funcional. Por un lado tendremos registrados valores de x_0 y del otro, los valores correspondientes de la integral definida. Esta correspondencia entre los valores de x_0 y los de la integral definida, constituye una función llamada "la integral indefinida" de la función $y = f(x)$. Aquí radica lo esencial del asunto: la integral definida de la función $y = f(x)$ es un número determinado por un intervalo de longitud definida y una porción de la curva $y = f(x)$, definida en ese intervalo. Cuando el intervalo se extiende desde un punto fijo a través de una sucesión de otros, a cada uno de éstos corresponde un valor de la integral definida. Esta correspondencia, esta función, es *la integral indefinida de la función original* $y = f(x)$ y se representa simbólicamente así:

$$\int f(x)dx$$

De todo esto podrá usted adivinar, quizá, lo que tienen de común las dos ramas del cálculo, aparentemente tan diversas, puesto que la relación entre derivación e integración nos trae reminiscencias de la aritmética elemental. Es la mis-

ma relación que existe entre la adición y la sustracción, la multiplicación y la división, el elevar a una potencia y el extraer raíz. Una de las operaciones es la *inversa* de la otra. Partiendo de la función $y = f(x)$, por derivación obtenemos $\frac{dy}{dx}$. ¿Qué obtenemos al integrar $\frac{dy}{dx}$? Aquí se revela el motivo del cálculo puesto que obtenemos la función original $y = f(x)$. Una integral indefinida de la función $y = f(x)$ es otra función de x que indicaremos así: $y = F(x)$. Por supuesto que la derivada de $y = F(x)$ es $f(x)$. En consecuencia, toda función puede ser considerada como la derivada de su integral, y como una integral de su derivada.

Anteriormente aludimos a la función exponencial, $y = e^x$, y a su utilidad para describir los fenómenos de crecimiento. Es la única función cuya razón de cambio es igual a la función misma. Derivando $y = e^x$, se obtiene: $\frac{dy}{dx} = e^x$. Integrando sale el mismo resultado. Se deduce entonces que la biografía de la población de cualquier organismo —ameba, hombre o pino californiano, de cualquier fenómeno que presente propiedades de crecimiento orgánico— puede describirse adecuadamente mediante la integral de e^x. Esta idea, un tanto inquietante, no es difícil de comprender. La proporcionalidad de la razón de cambio de crecimiento con respecto al estado de crecimiento puede sintetizarse mediante la función exponencial. Si ésta es integrada, el crecimiento total registrado en cualquier período determinado está dado por la integral definida y el carácter general del crecimiento está sucintamente explicado mediante la integral indefinida.

Para concluir, examinemos nuevamente el problema de un cuerpo que cae. Habíamos comenzado considerando la distancia desde la cual cayó el cuerpo en un período de tiempo y establecimos su velocidad, en cada instante, por derivación. La aceleración en cada instante fue obtenida, a su vez, por derivación de la primera derivada, hallando la rapidez de cambio de la velocidad con respecto al tiempo. Galileo y Newton hicieron lo mismo, pero a la inversa. Supusieron, sagazmente, que la aceleración de un cuerpo que cae era constante, la constante de gravitación. Integrando la función que expresa esta hipótesis, hicieron el descubrimiento clásico de las leyes del movimiento:

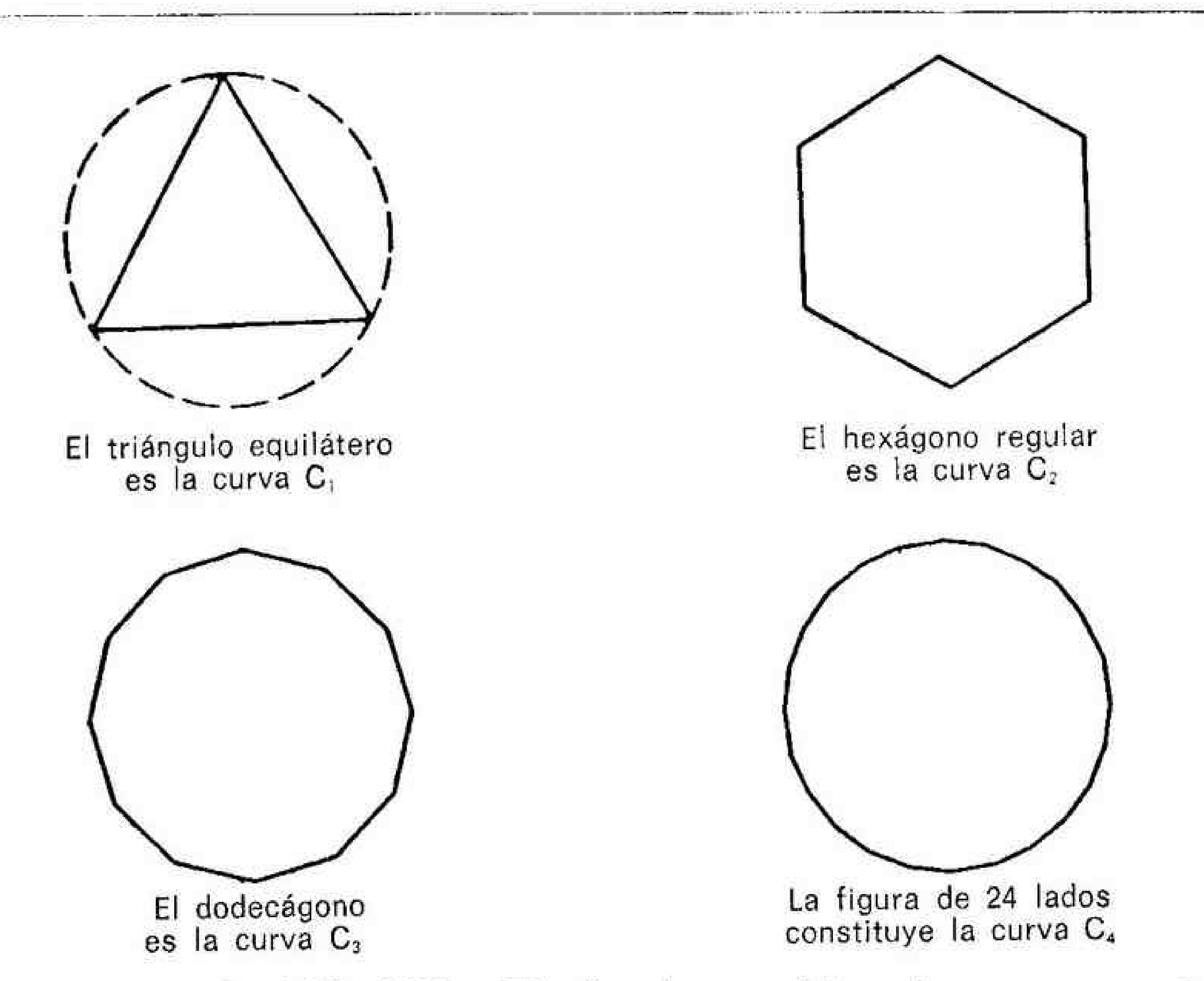
1. La rapidez de un cuerpo que cae es igual a gt, en la que g es la aceleración de la gravedad (9,81 m/seg^2 ó 32 pies/seg^2) y t el tiempo transcurrido desde que se arrojó el cuerpo.
2. La distancia recorrida por el cuerpo que cae es: $1/2\, gt^2$.

Éstas y las demás leyes del movimiento que rigen a todas las partículas del Universo, se deducen, sencilla y elegantemente, por medio del cálculo. Pero esto no es todo, puesto que el cálculo no sólo ayudó a elevar algunos de los secretos más íntimos de la naturaleza, sino que le dio al matemático más nuevos mundos por conquistar que aquéllos por los que suspiró Alejandro el Grande.

APÉNDICE

Curvas patológicas

Las curvas que trata el cálculo son normales y saludables, no poseen idiosincrasias. Pero los matemáticos no se sentirían a gusto con sólo ocuparse de configuraciones simples y vigorosas. También su curiosidad se extiende a los pacientes psicopáticos, cada uno de los cuales presenta una historia clínica que no se parece a la de ningún otro; son éstas las



Figs. 141, 142, 143, 144. El círculo considerado como curva límite de una sucesión de curvas.

curvas patológicas de las matemáticas. Trataremos de examinar algunas de ellas en nuestra clínica.

Antes de hacerlo, será necesario introducir el concepto de curva como el límite de una sucesión de polígonos. Supóngase que se inscribe un triángulo equilátero en un círculo. Este triángulo puede ser considerado como una curva —C_1—. Sea C_2 el hexágono regular que se obtiene dividiendo en dos partes iguales a los tres arcos de la figura 141 y uniendo, en orden, los seis vértices (fig. 142).

C_3 es el dodecágono regular formado al dividir en dos partes iguales a los seis arcos de la figura 143 y uniendo, en ese orden, los doce vértices. Repítase este proceso dividiendo a los arcos y duplicando el número de lados. La curva a la que se acercan, como límite, estos polígonos es el círculo.

Así, la circunferencia, puede ser definida como la curva límite de una sucesión de curvas o polígonos.

1. *La curva Copo de Nieve.* Se comienza con un triángulo equilátero de lado igual a la unidad. Este triángulo es la curva C_1 (fig. 145).

Divídase a cada uno de sus lados en tres partes iguales y tómese el subintervalo de en medio, determinado por la subdivisión y constrúyase un triángulo equilátero dirigido hacia fuera. Bórrense las partes comunes a los triángulos nuevos y viejos. Esta curva poligonal simple se llama C_2. Divídase en tres partes iguales a cada lado de C_2 y nuevamente, en forma parecida, constrúyase un triángulo equilátero dirigido hacia

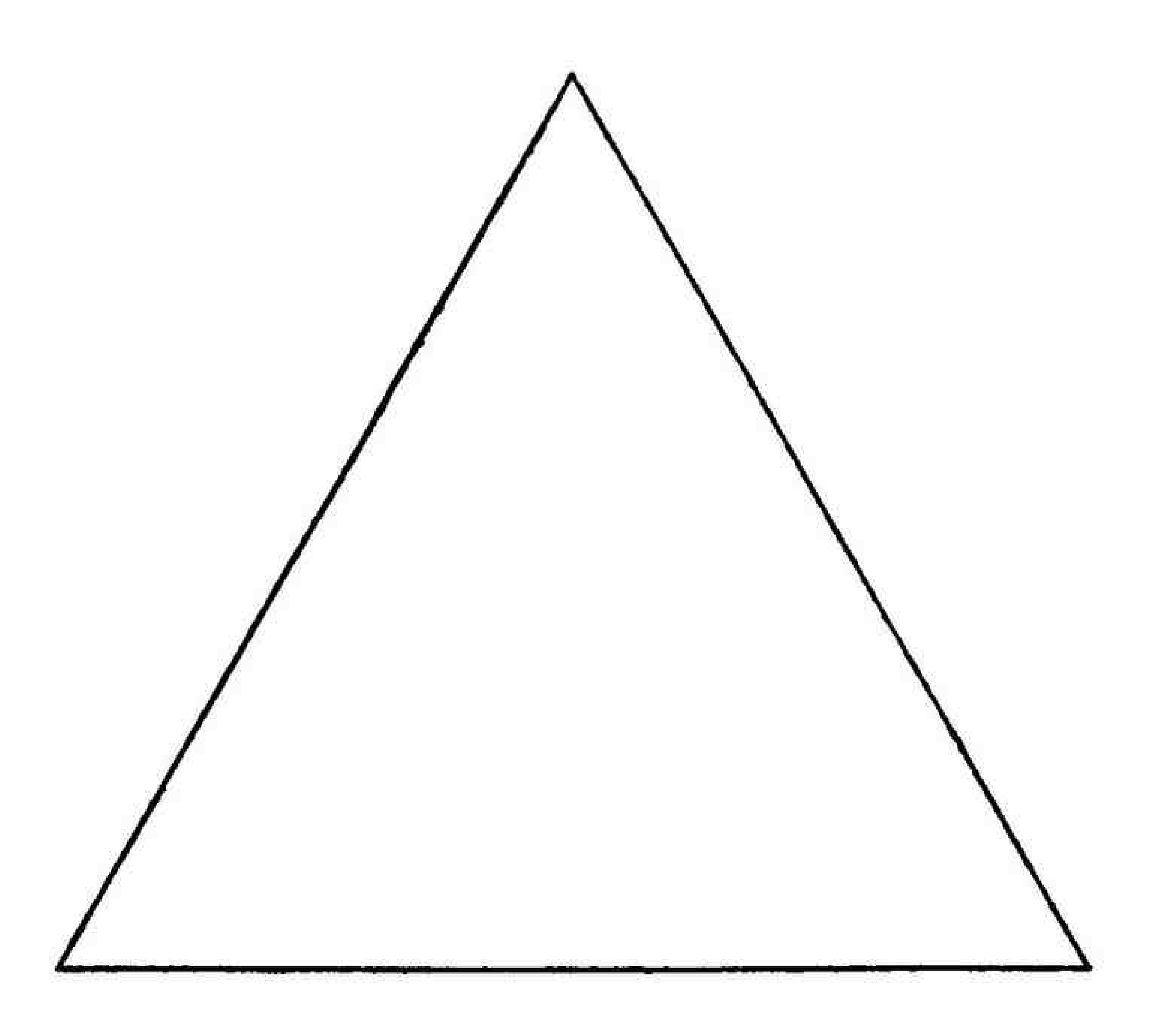


Fig. 145. La primera etapa de la curva copo de nieve, C_1.

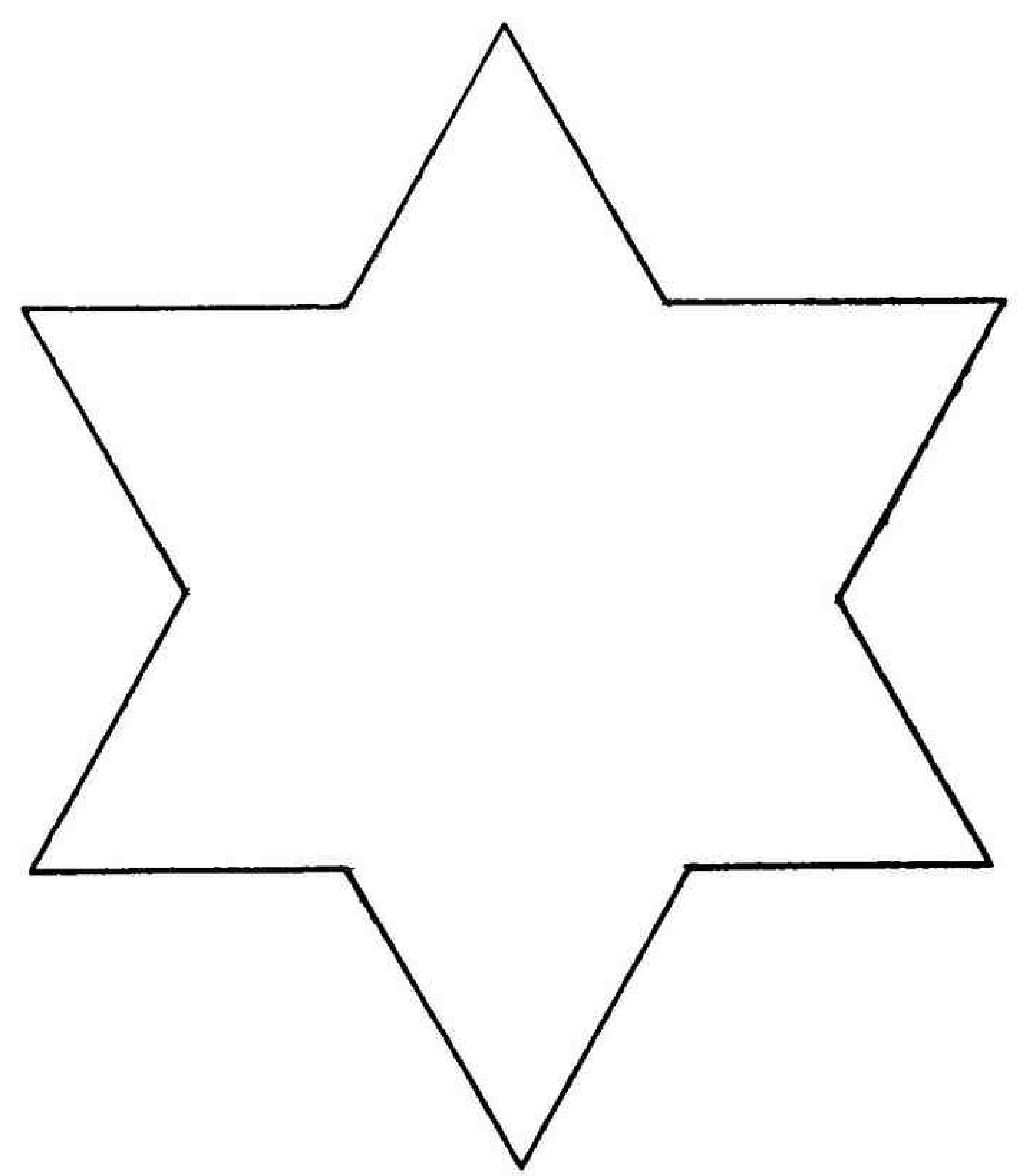


Fig. 146. La segunda etapa de la curva copo de nieve, C_2.

fuera. Bórrese la parte de las curvas comunes a las figuras nuevas y viejas. Esta curva simple es C_3.

Repítase este procedimiento tal como lo indican las figuras 148-150.

¿Cuál es la *curva límite* de esta sucesión de curvas? ¿Por qué se le llama Curva Copo de Nieve? Y, ¿por qué se la describe como patológica?

Su nombre se deriva de la forma que asume en las sucesivas etapas de su desarrollo. Su carácter patológico lo con-

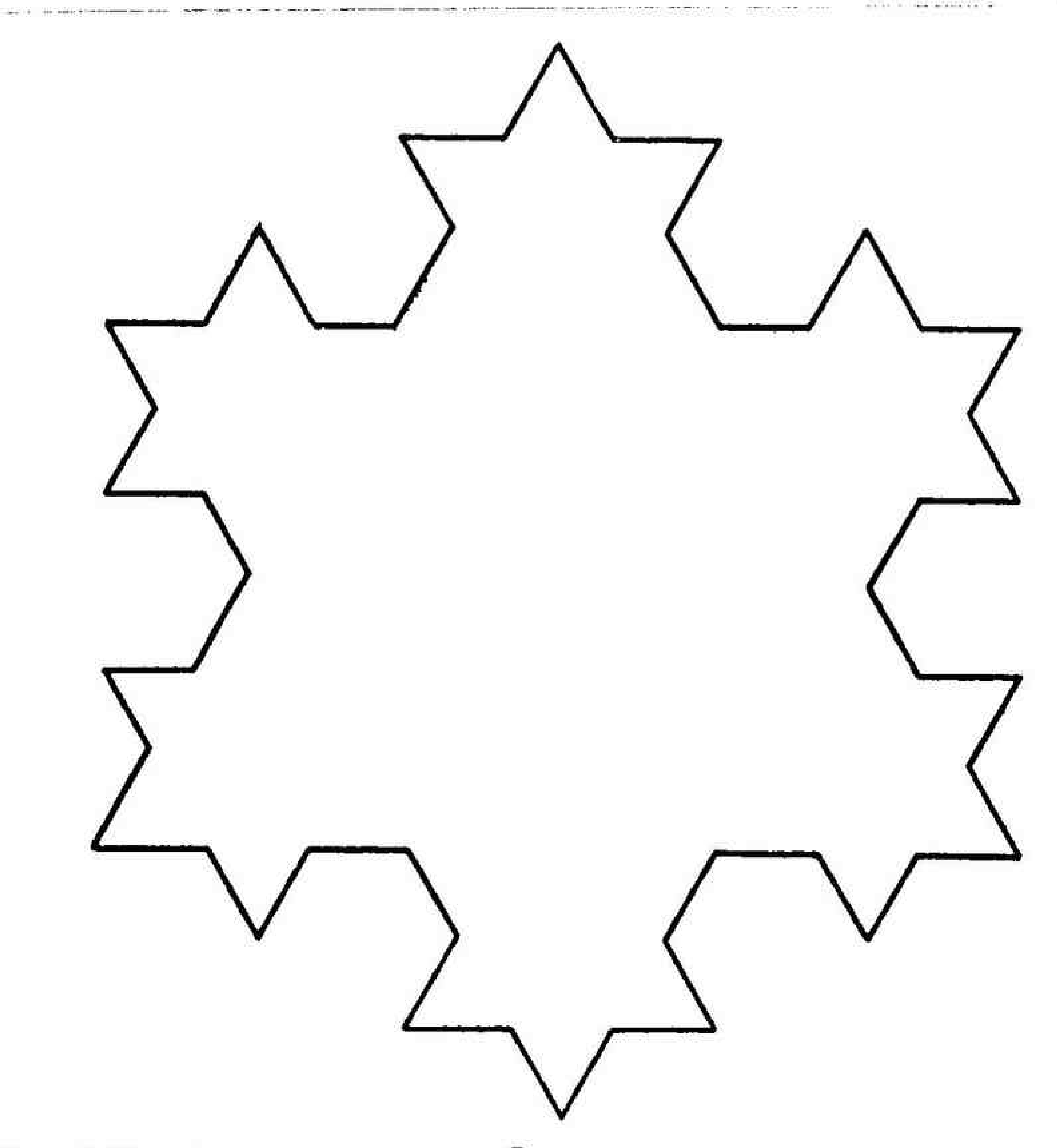


Fig. 147. La tercera etapa, C_3.

firma este increíble rasgo: Aunque se concibe fácilmente que la curva límite cabe en una hoja de papel, es difícil imaginar que esto sea posible, porque, si bien el área es finita, ¡la longitud de su perímetro es infinita! Pero es evidente que en cada etapa de la construcción el perímetro aumenta, y ya que la sucesión de números que representan a la longitud del perímetro en cada etapa no converge, el perímetro supera toda cota prefijada. Estamos, pues, ante un hecho sorprendente: una curva de longitud infinita puede dibujarse en una

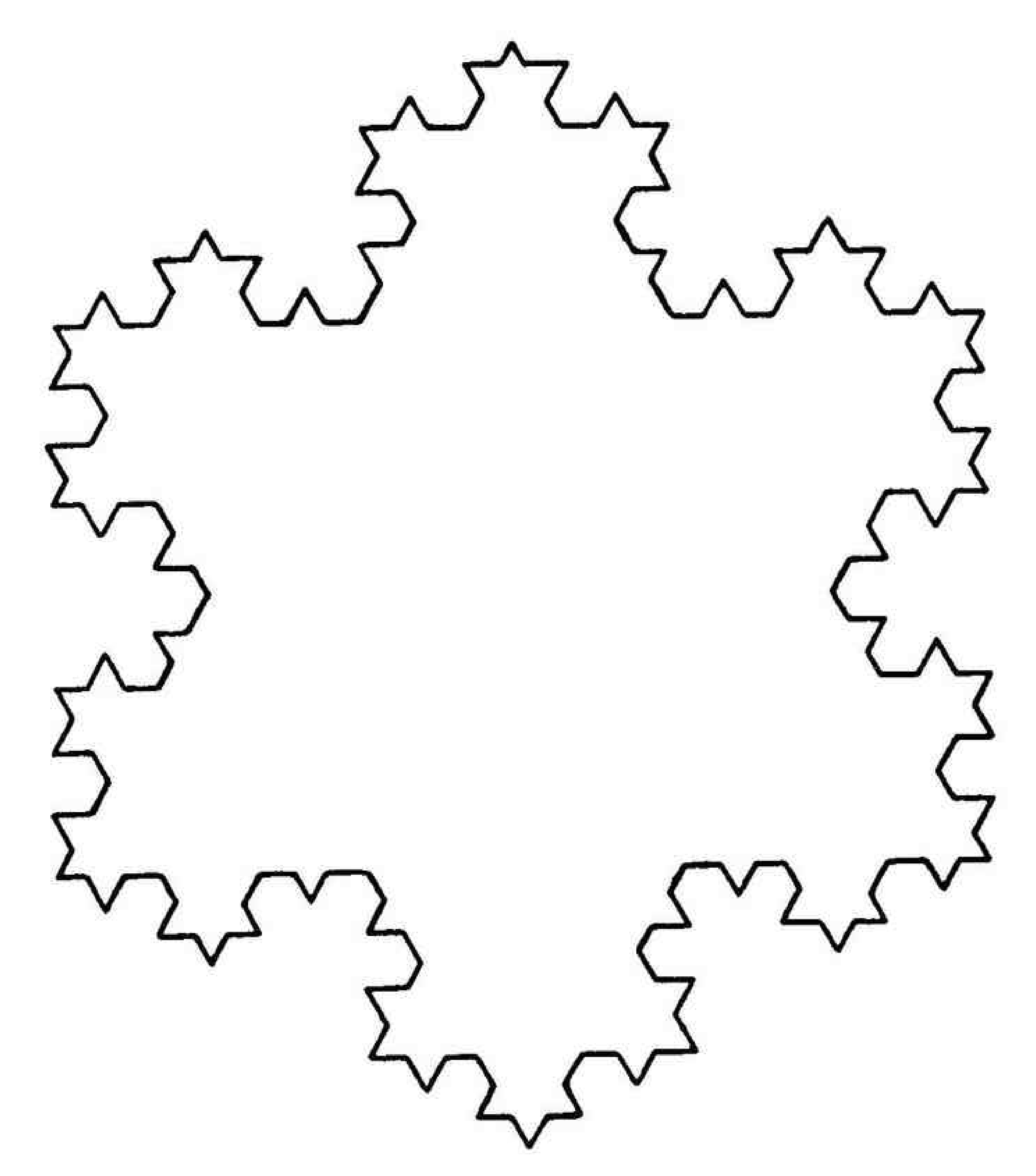


Fig. 148. La cuarta etapa, C_4.

pequeña hoja de papel —por ejemplo, en un sello de correos.

La demostración es sencilla. El perímetro del triángulo original era 3. El perímetro de la curva C_2 es $3 + 1$; el de la C_3, $3 + 1 + \frac{4}{3}$; el de la C_4, $3 + 1 + \frac{4}{3} + \frac{4^2}{3^2}$. El perímetro de C_n es; $3 + 1 + \frac{4}{3} + \frac{4^2}{3^2} + \ldots + \frac{4^{n-2}}{3^{n-2}}$. De este modo, a medida que crece n, crece la serie, porque estamos ante una serie infinita que no converge.

El hecho de que la curva no se sale del papel, prueba que el área del copo de nieve es finita. Explícitamente, el área de la curva final es $1^3/_5$ veces mayor que la del triángulo original y por si esto no fuese bastante misterioso, considérese que no es posible indicar en ningún punto de la curva límite la dirección en la que ésta varía, es decir, no existe tangente[5].

2. *La curva anticopo de nieve.* Se obtiene dibujando los triángulos hacia dentro, no hacia fuera, y participa de muchas de las propiedades de la que acabamos de considerar. Su perímetro es infinito, mientras que su área es finita y tampoco se le puede trazar tangente alguna en ningún punto (figs. 151-154).

3. Otra curva patológica es la *Curva que entra y sale.* Trácese un círculo de radio igual a la unidad y divídase su circunferencia en seis arcos iguales. Tómense tres arcos alternados y diríjalos hacia dentro. El círculo original es C_1, la nueva figura, C_2 (figs. 155-156).

El perímetro de C_2 es igual al de C_1, por cuanto su longitud no se altera al doblar hacia dentro a los tres arcos.

Divídase luego cada arco en tres partes iguales y dóblese la parte media hacia el exterior, si ya está doblado hacia el interior y recíprocamente si lo está hacia el exterior. Esta nueva curva es C_3. Su perímetro es también igual al del círculo original. Además, el área de C_3 es la misma que la de C_2 porque hemos añadido y sustraído, alternativamente, segmentos de igual tamaño (fig. 157).

Repitamos este proceso. La curva límite tiene un perímetro igual al perímetro del círculo. Su área es igual a la de C_2, que, a su vez, es igual al área de un hexágono regular. Esta curva, al igual que la de copo de nieve y la anticopo de nieve, tiene también sus características patológicas.

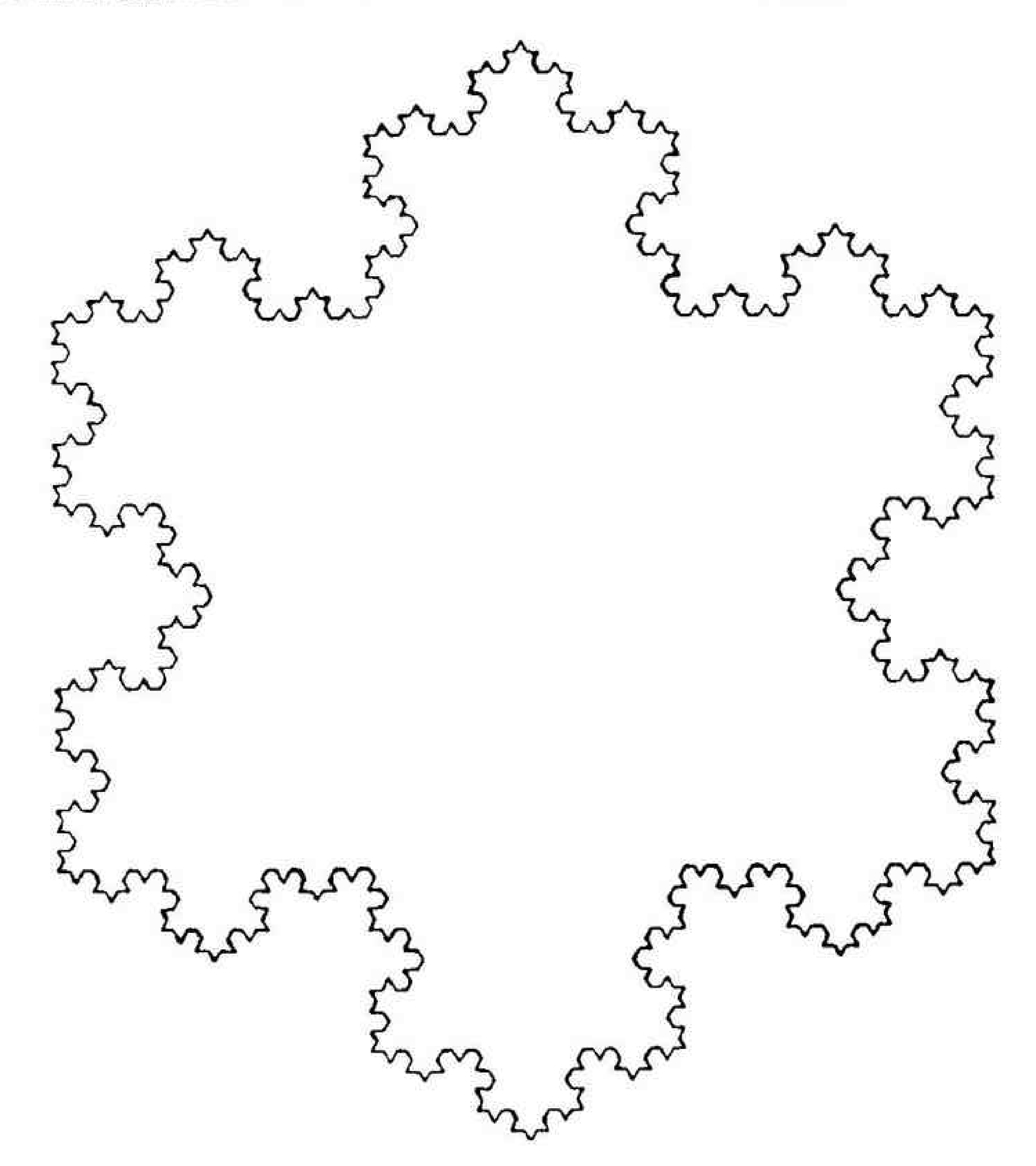


Fig. 149. La quinta etapa, C_5.

Mientras que la curvatura de un círculo se calcula sin dificultad, *la curva que entra y sale* presenta un aspecto distinto. Consideremos un punto cualquiera de ella. ¿En qué sentido, hacia el centro del círculo o hacia fuera del centro, mediremos su curvatura? Descubrimos que no hay curvatura definida. La segunda derivada, por lo tanto, no existe.

4. *Curvas que llenan el espacio.* Uno de los principios fundamentales de la geometría es que un punto no tiene dimensiones y que una curva es de una dimensión y no pue-

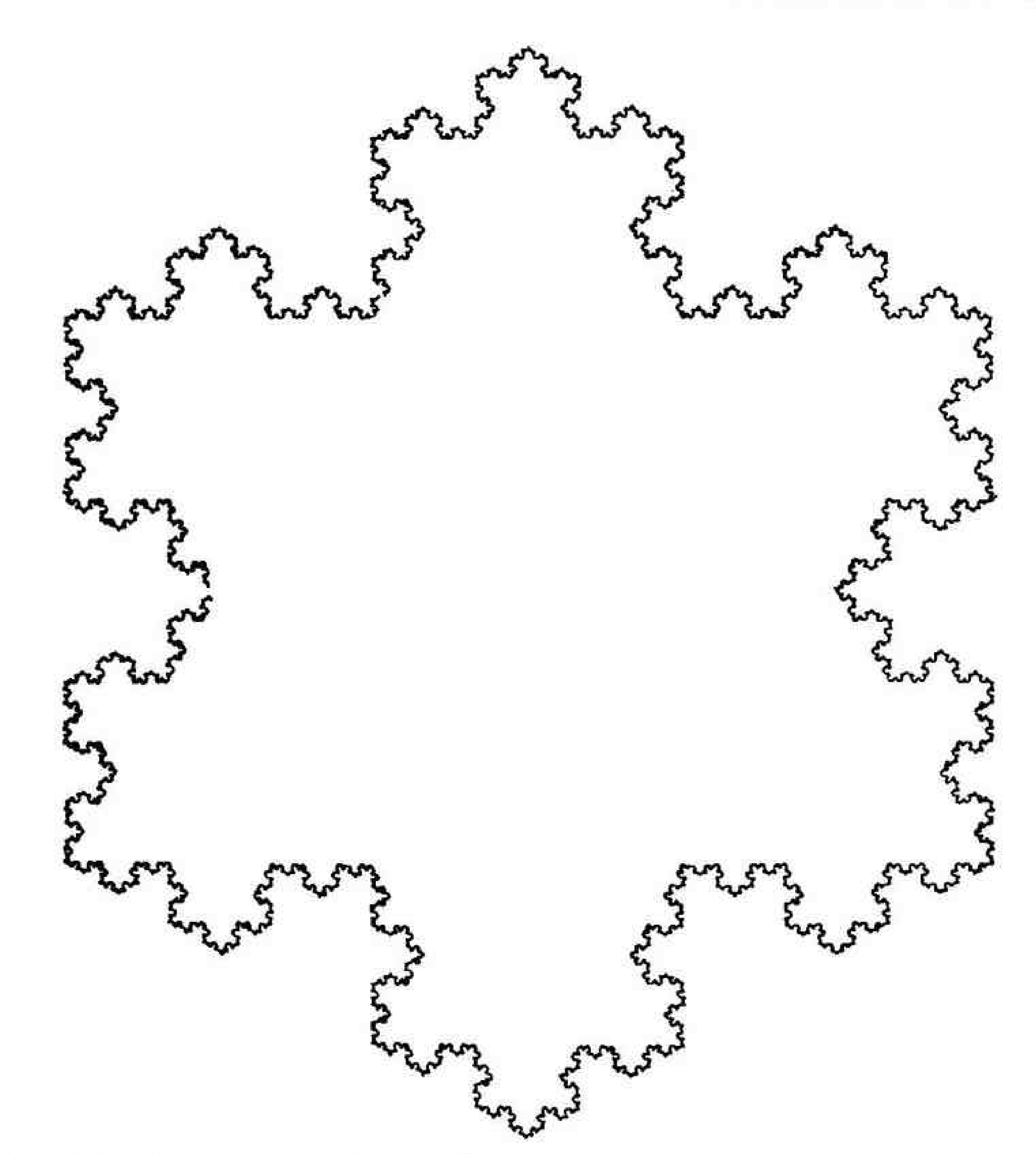
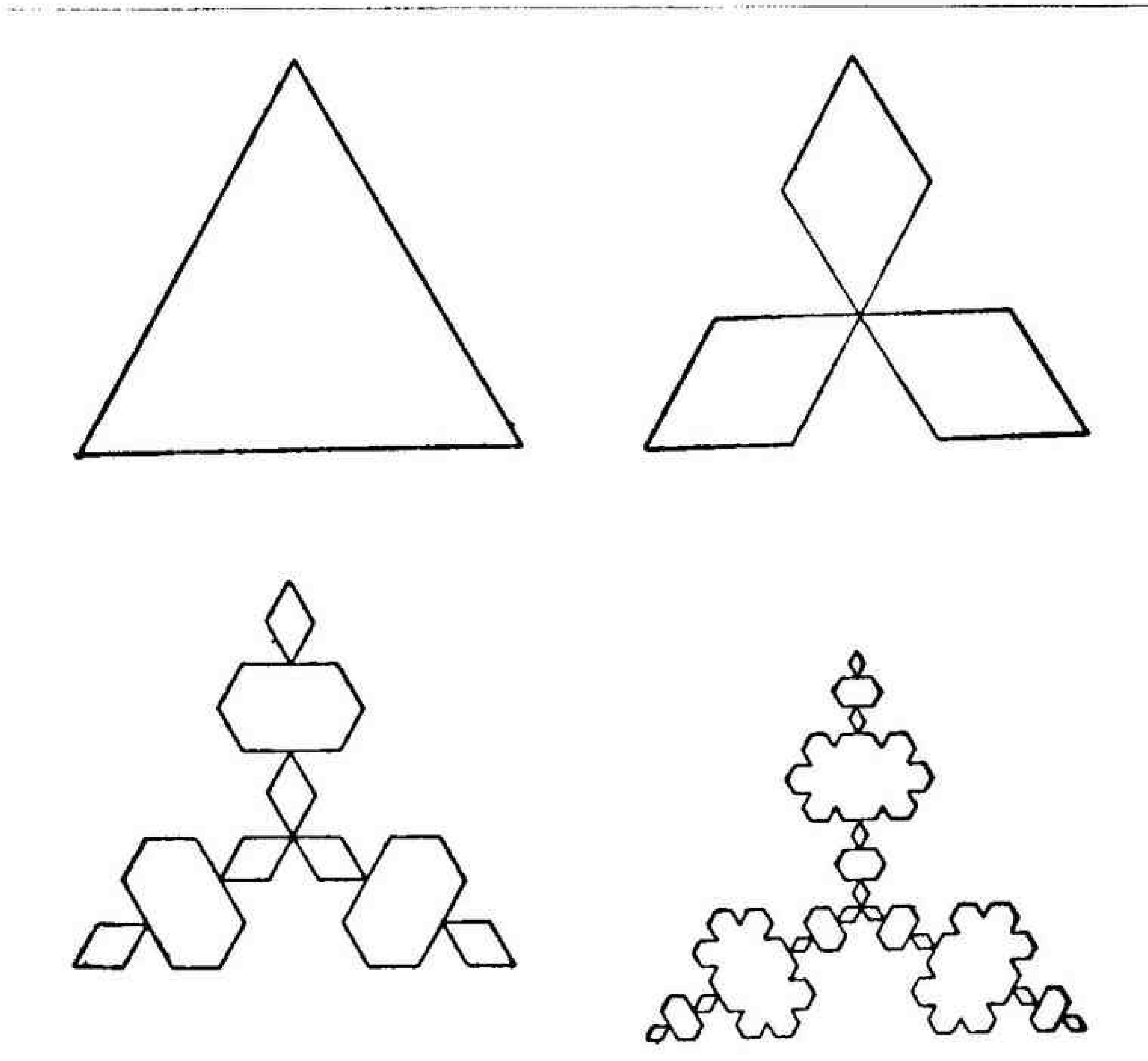


Fig. 150. La sexta etapa, C_6.

de, por lo tanto, llenar un espacio dado. Esta férrea convicción debe, también, ser quebrantada. Pues contemplad el supremo ejemplar patológico, *la curva que llena el espacio*, la que no sólo ocupará el interior de un cuadrado, sino que se tragará el espacio de una caja cúbica.

Las etapas sucesivas de dicha curva se indican en las figuras 159-164. Elíjase *cualquier* punto en el cuadrado o cubo. Puede demostrarse que finalmente, cuando se haya completado la curva, llegará a pasar por ese punto. Ya que



Figs. 151, 152, 153, 154. Las primeras cuatro etapas de la curva anticopo de nieve.

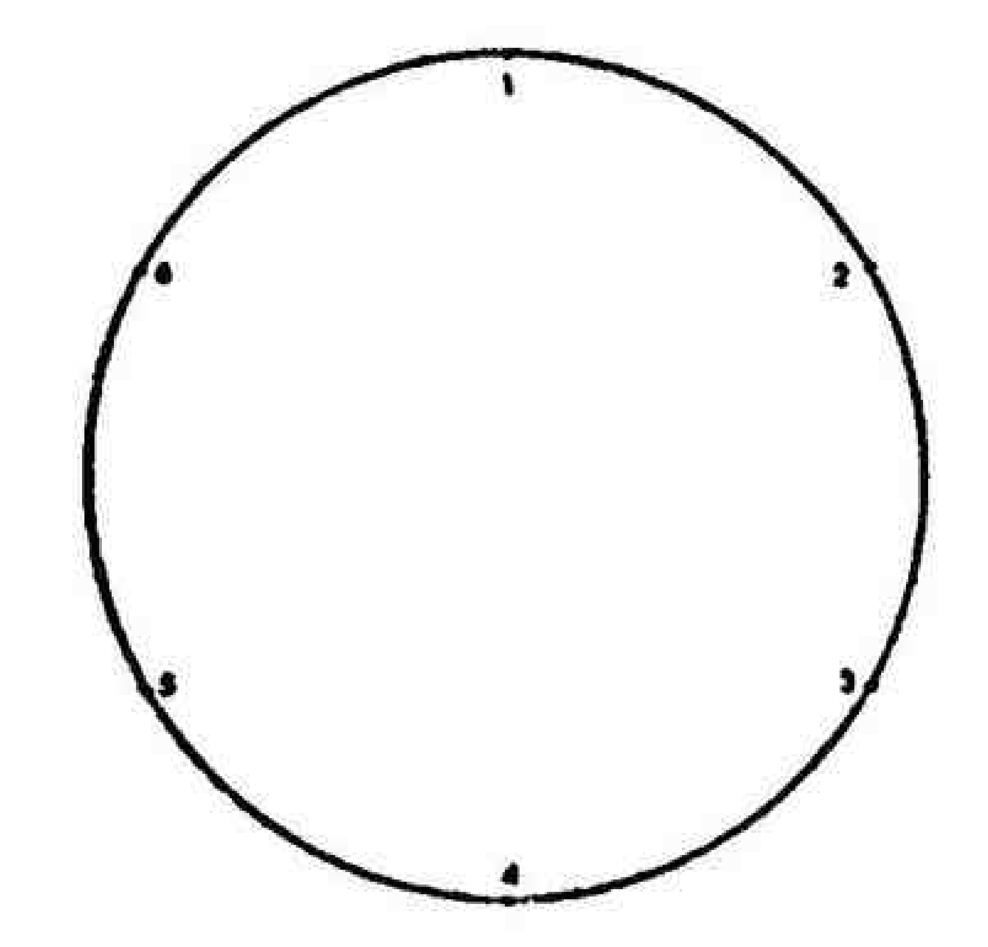


Fig. 155. La curva que entra y sale, etapa C_1.

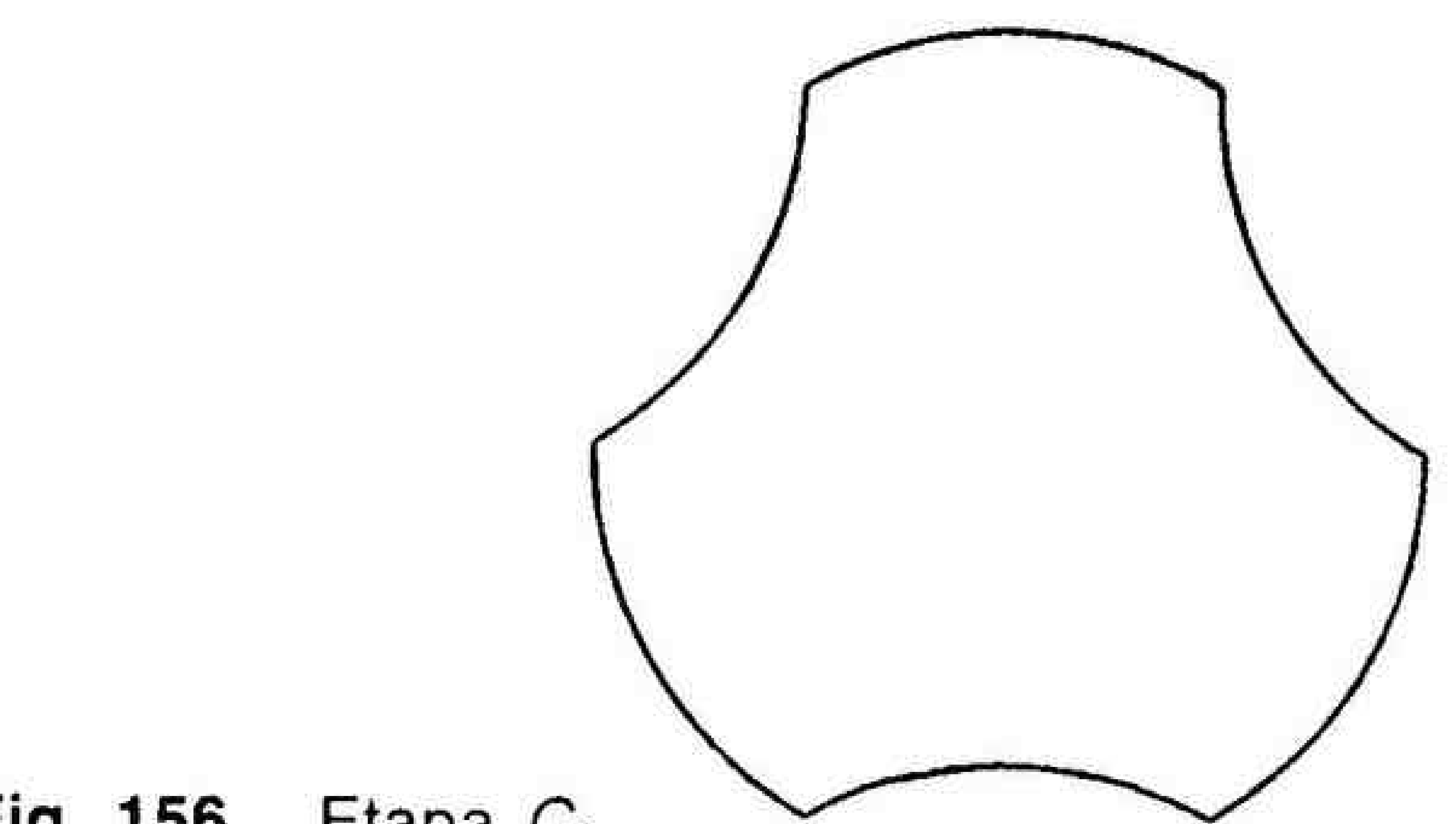


Fig. 156. Etapa C_2.

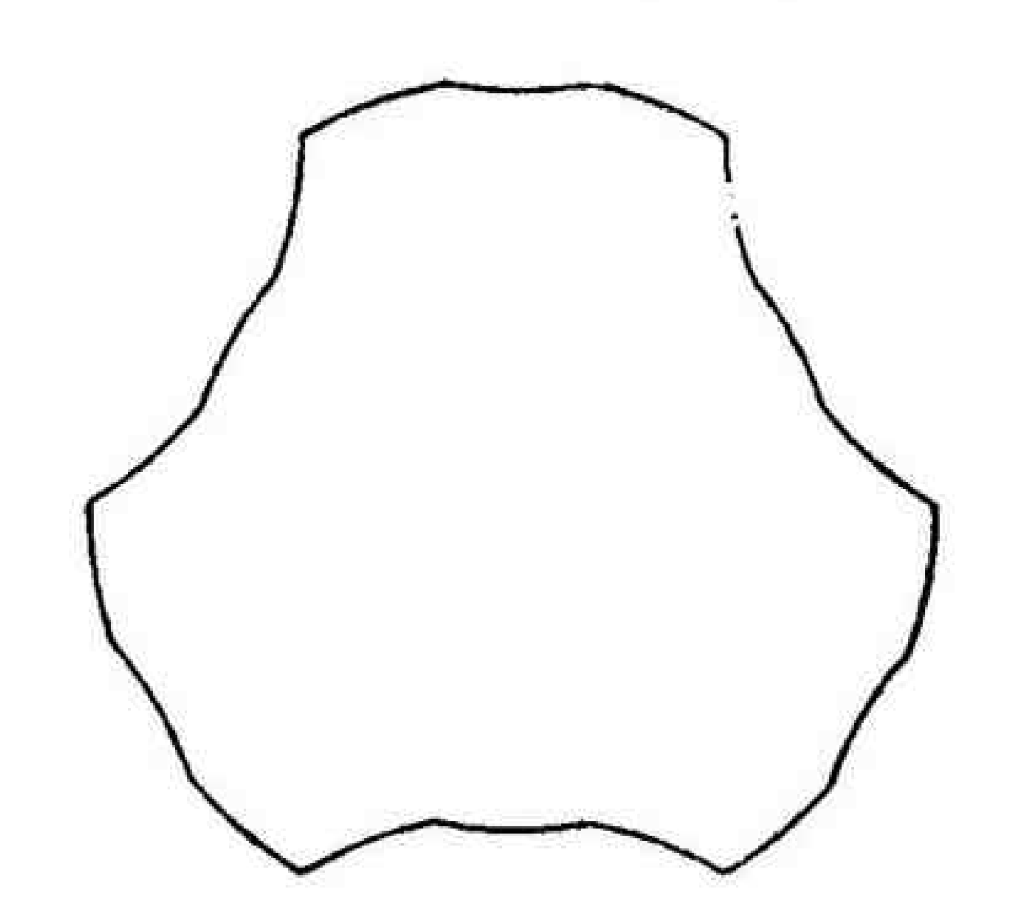


Fig. 157. Etapa C_3.

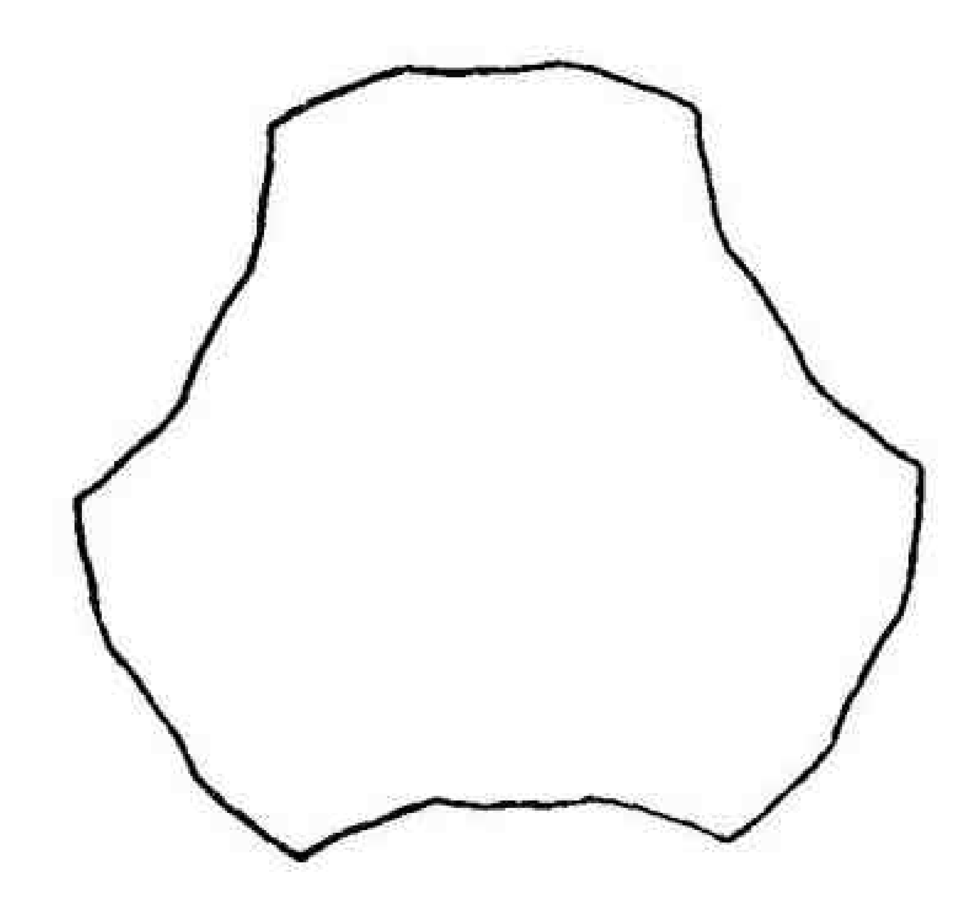


Fig. 158. Etapa C_4.

este razonamiento puede hacerse extensivo a *todos los puntos*, se deduce, lógicamente, que la curva debe llenar todo el cuadrado o el cubo.

5. *La curva cruzada o entrelazada.* Esta curva tiene la propiedad de que se cruza a sí misma *en todos y cada uno de sus puntos*. Estamos seguros que usted no nos cree —ni nunca lo creería— pero puede ver las instrucciones para hacerla en la página siguiente.

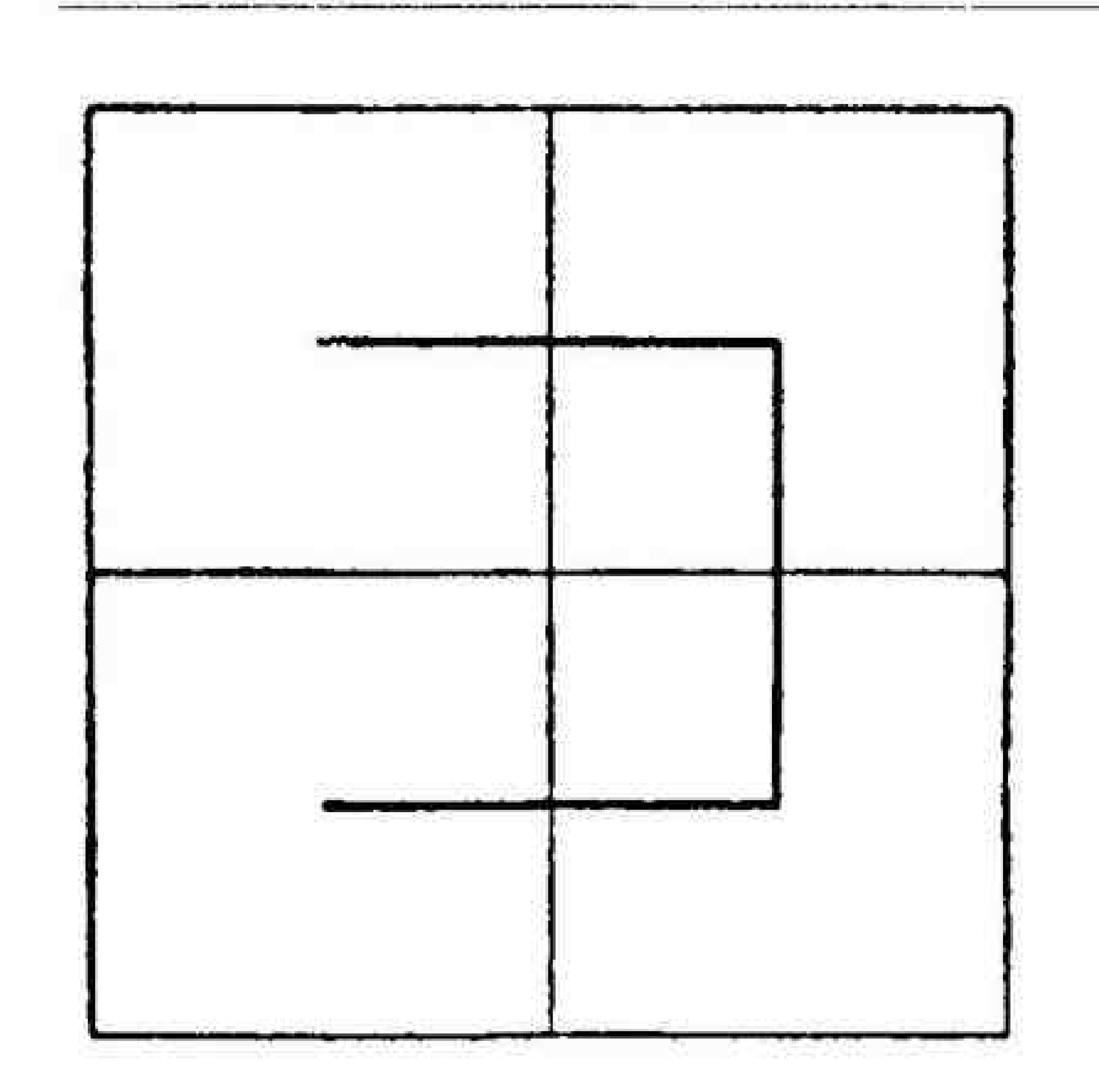


Fig. 159. La curva que llena el espacio. Etapa 1.

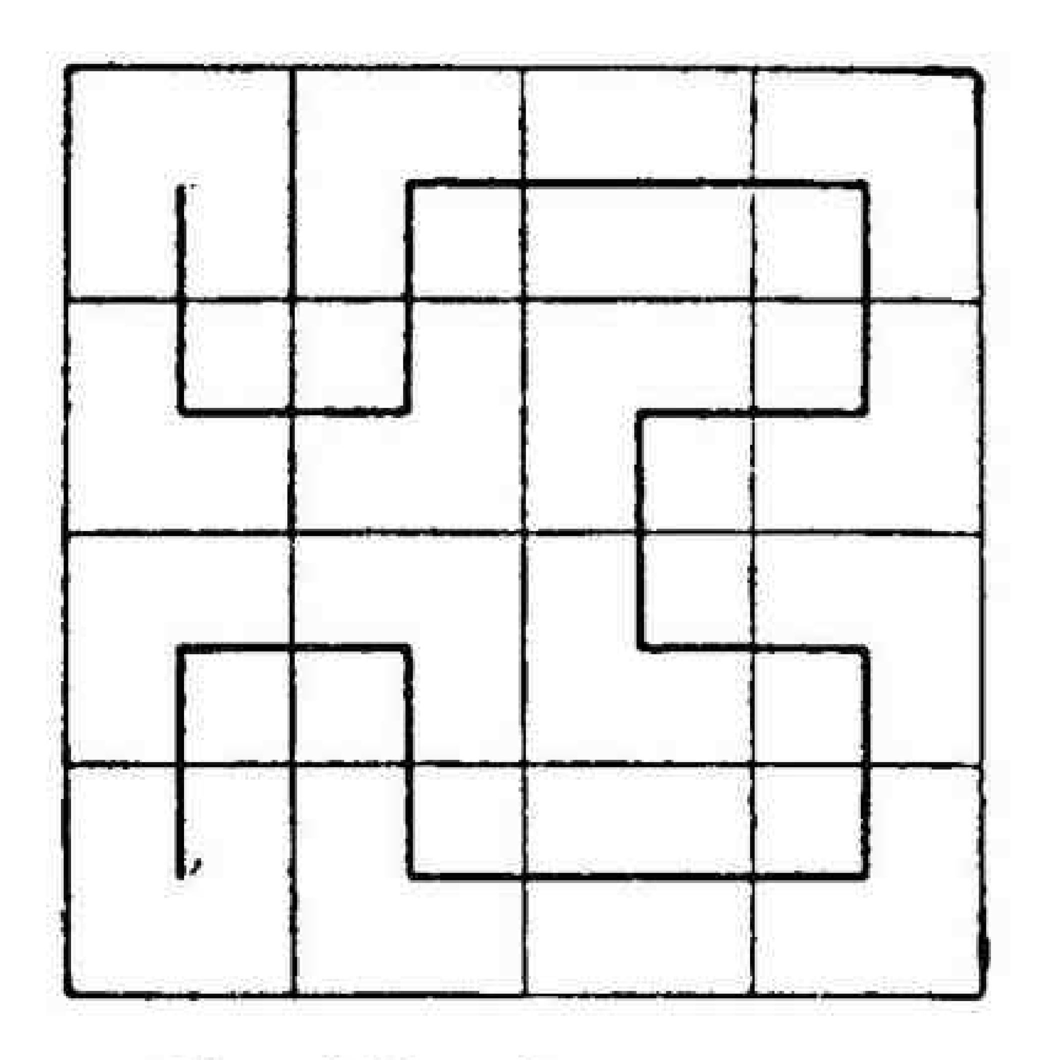


Fig. 160. Etapa 2.

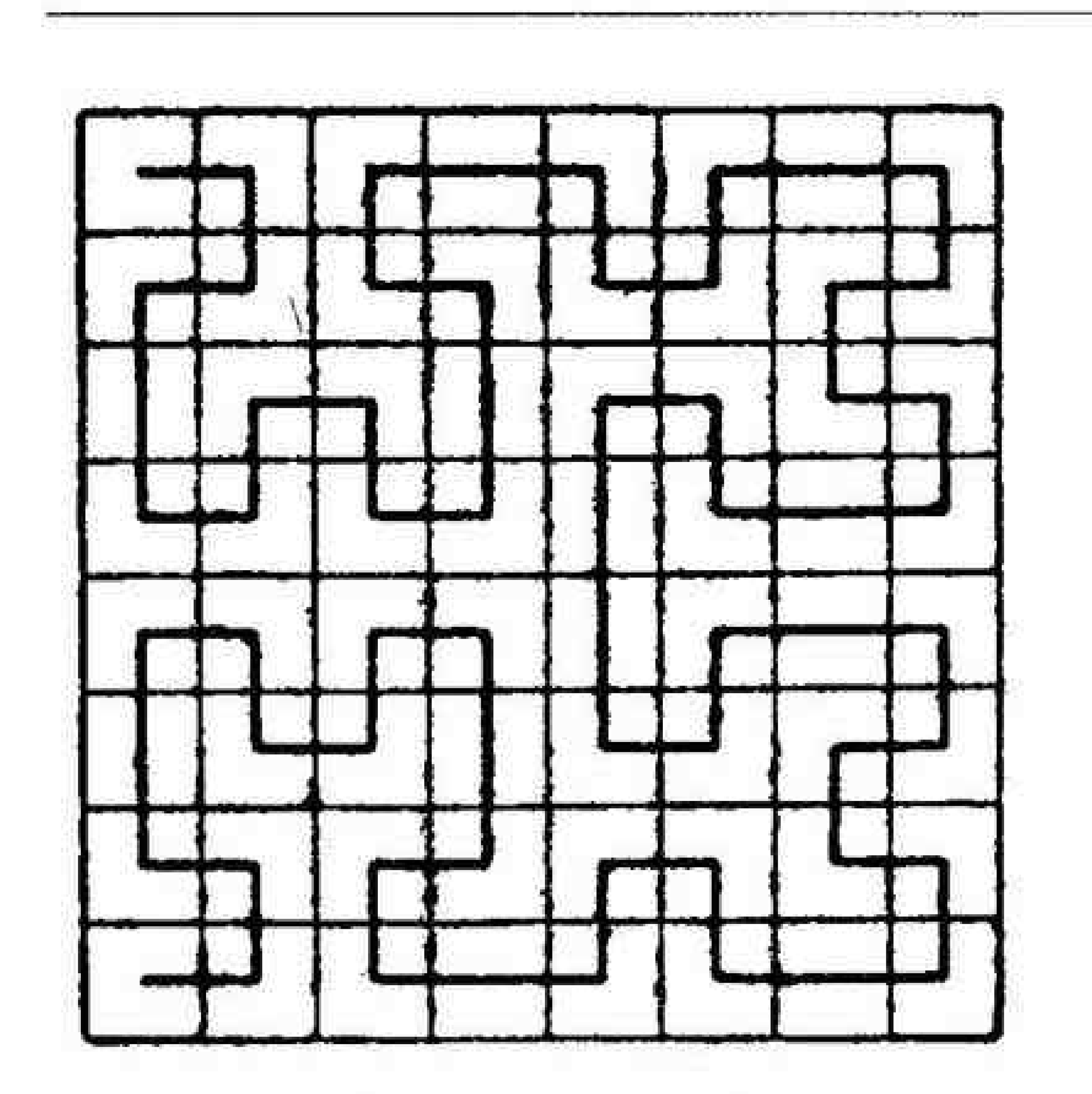


Fig. 161. Etapa 3.

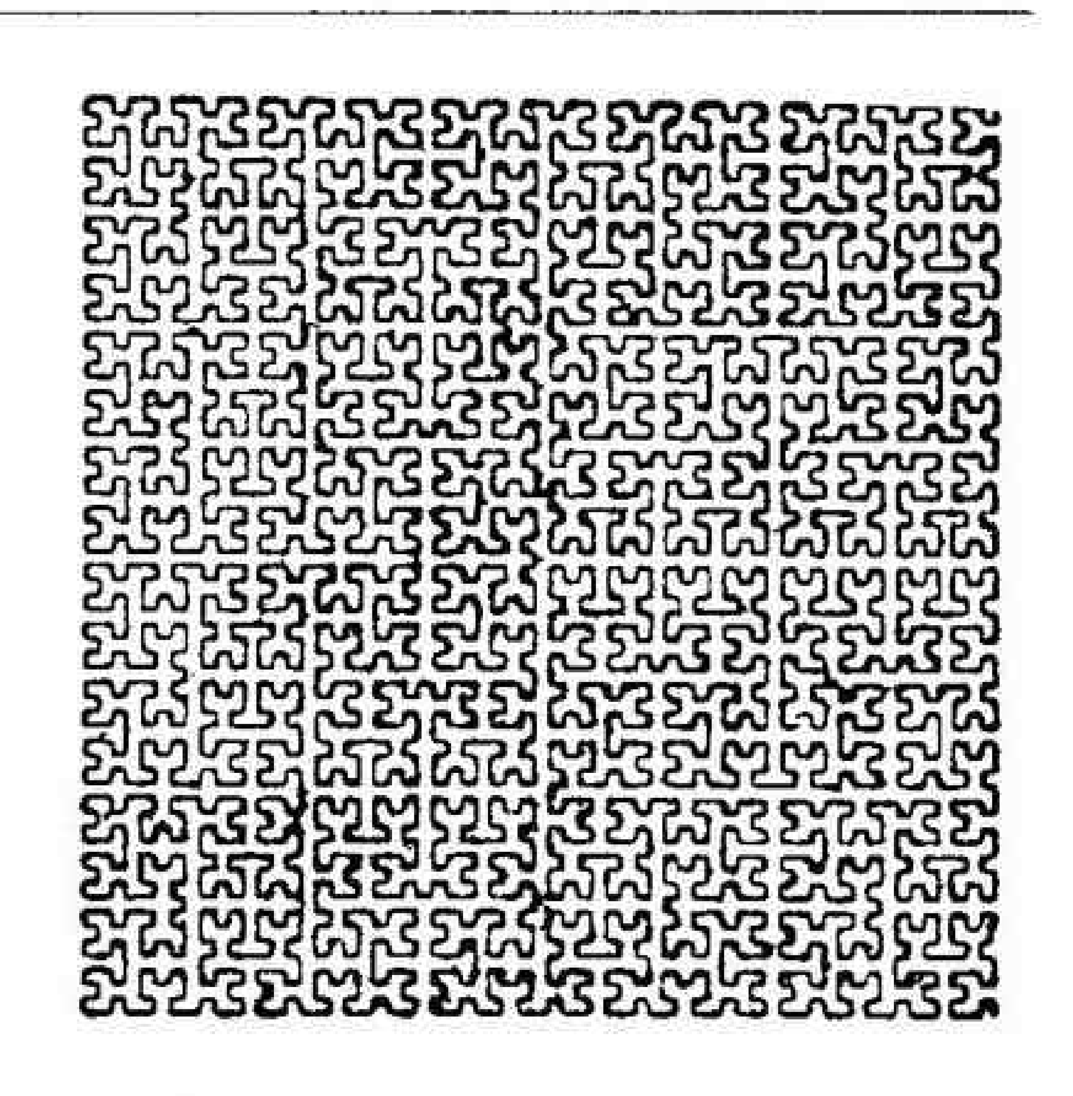
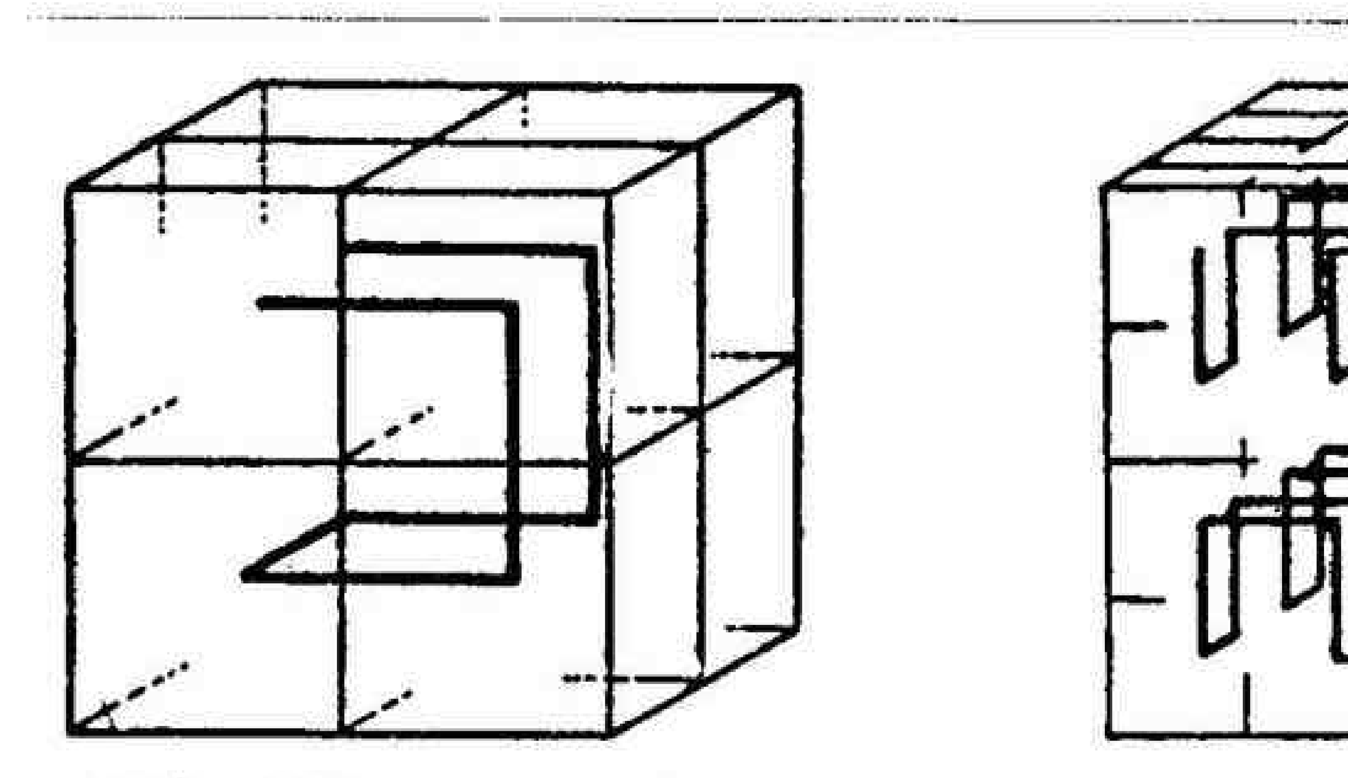


Fig. 162. Una etapa adelantada.

1.er paso: Inscríbase un triángulo dentro de un triángulo, como en la figura 165, sombreando el triángulo interior.

2.° paso: Continúese el proceso para cada uno de los tres triángulos restantes, como en la figura 166.



Figs. 163, 164. Las primeras dos etapas de una curva que llena en su totalidad una caja cúbica.

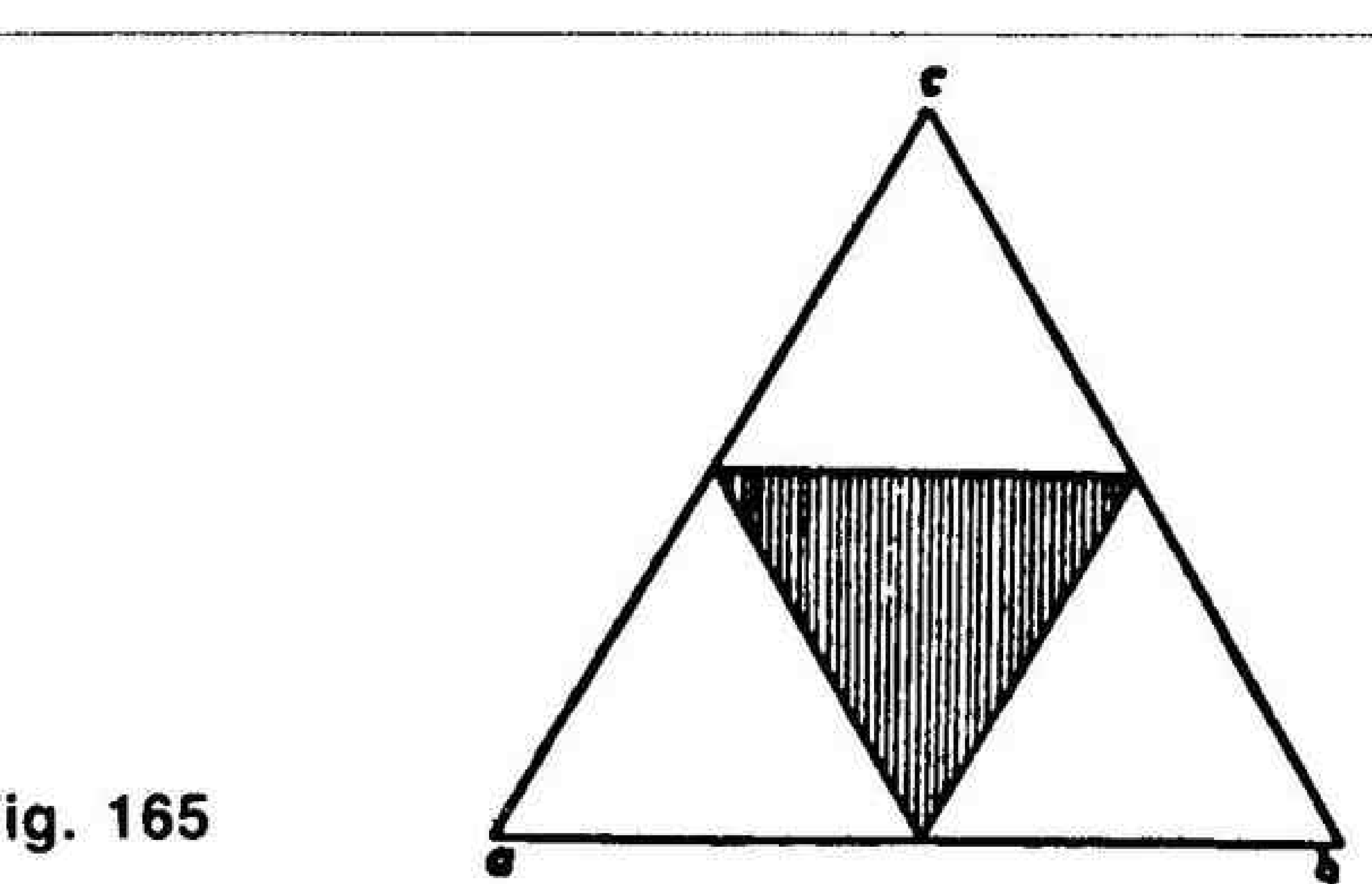


Fig. 165

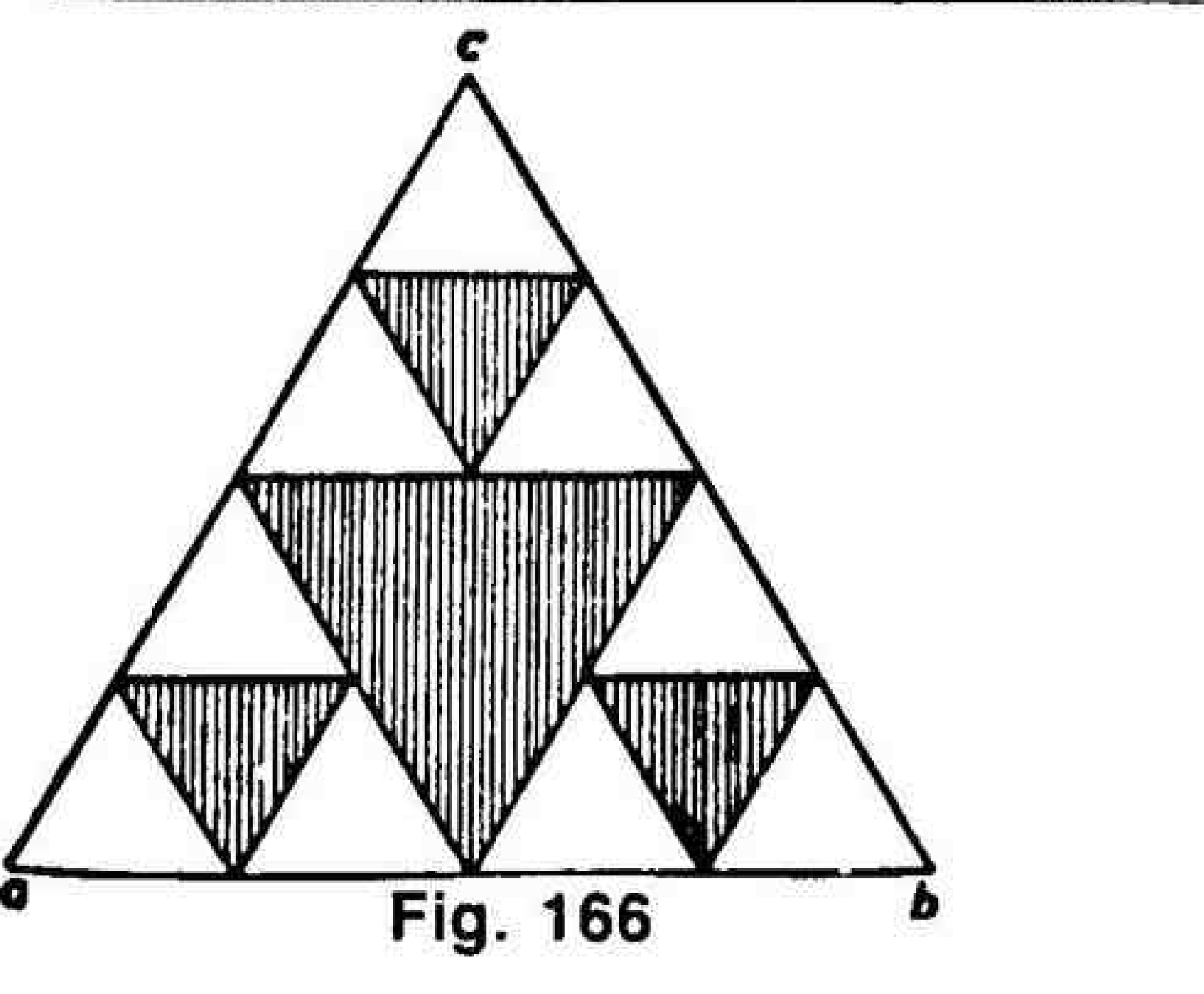


Fig. 166

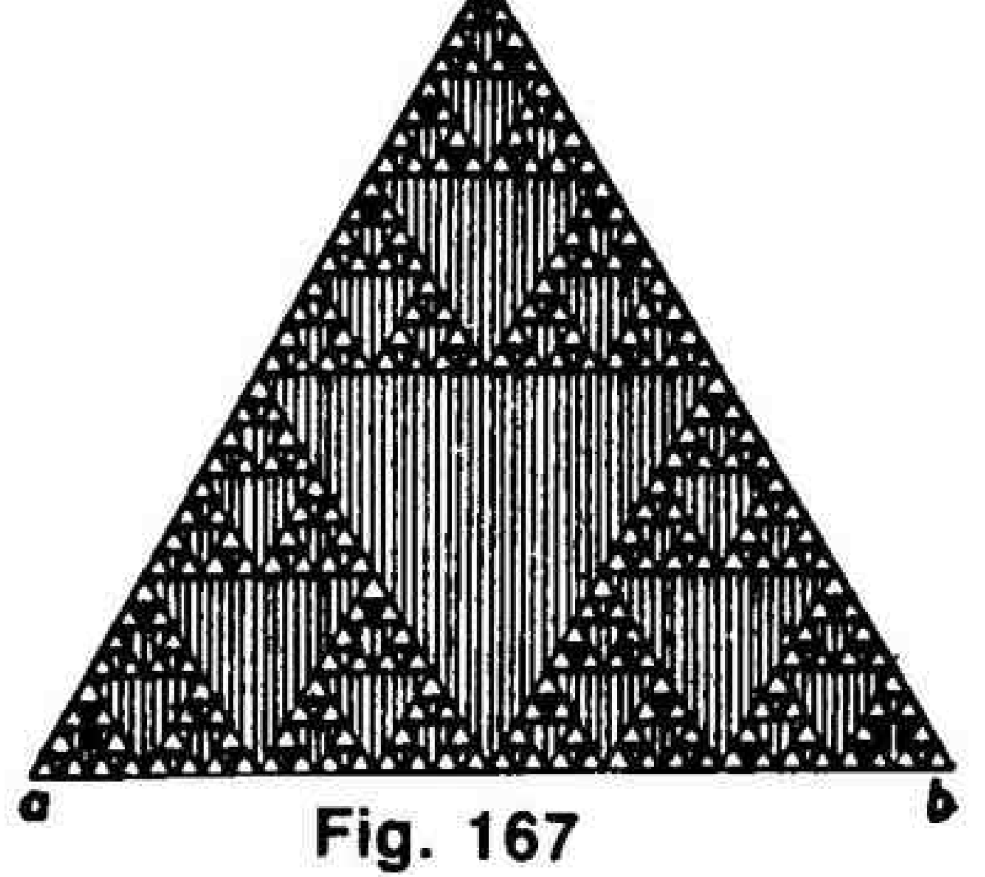


Fig. 167

3.[er] paso hasta el paso n: Repítase este proceso indefinidamente (la fig. 167 es la 5.ª etapa). Únanse entonces los puntos del triángulo original que quedaron sin sombrear y defórmesele de manera que los tres puntos *A*, *B* y *C* se junten.

Tendremos entonces la curva cruzada o entrelazada.

NOTAS DE ESTE CAPÍTULO

1. Cajori, *History of Fluxions*, página 321.
2. Repaso de trigonometría para quienes la han olvidado.

En el triángulo rectángulo que aparece a continuación, las razones trigonométricas (funciones de un ángulo) son las siguientes:

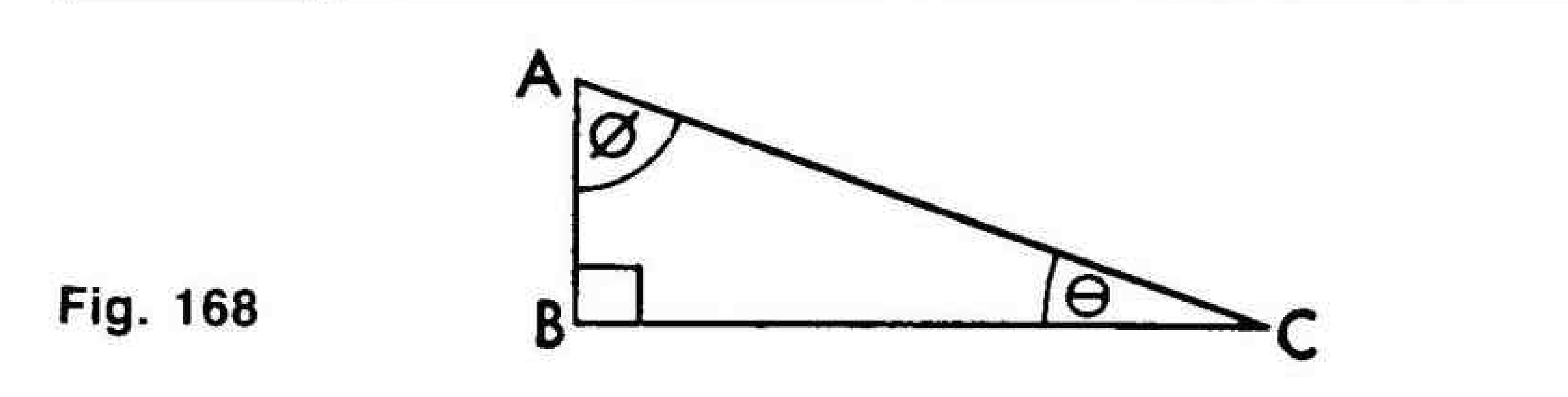


Fig. 168

$$\text{seno } \theta = \frac{\text{lado } AB}{\text{lado } AC} = \text{coseno } \varnothing$$

$$\text{coseno } \theta = \frac{\text{lado } BC}{\text{lado } AC} = \text{seno } \varnothing$$

$$\text{tangente } \theta = \frac{\text{seno } \theta}{\text{coseno } \theta} = \frac{\frac{AB}{AC}}{\frac{BC}{AC}} = \frac{AB}{BC} = \text{cotangente } \varnothing$$

En otras palabras, las funciones trigonométricas son las razones de los lados de un triángulo rectángulo entre sí y dependen, a su vez, de los ángulos.

El concepto de *tangente* tiene aplicación inmediata en la geometría analítica y en el cálculo. En el diagrama que aparece a continuación, la *pendiente* de la recta *AB* es la razón *P/Q*, que no es otra cosa que la *tangente del ángulo* θ.

Pero la palabra tangente tiene otro significado muy distinto del ya indicado. Este nuevo significado es esencial para el cálculo.

Dibújese en el plano cartesiano la curva *ABC*. Considérense dos puntos P_1 y P_2 de esta curva, unidos por una línea recta (véase la fig. 131). A medida que P_2 se mueve a lo largo de la curva acercándose a P_1, la recta que une estos puntos se aproxima a un valor límite llamado *la tangente a la curva ABC en el punto* P_1. La pendiente de esta recta tangente en el punto P_1 es la derivada de la función, cuya gráfica es la curva *ABC*, páginas 326, 328, 341.

3. La longitud de un segmento parabólico sólo puede expresarse en función de logaritmos y, por consiguiente, no podía ser calculada mediante los métodos elementales conocidos por los antiguos, página 349.

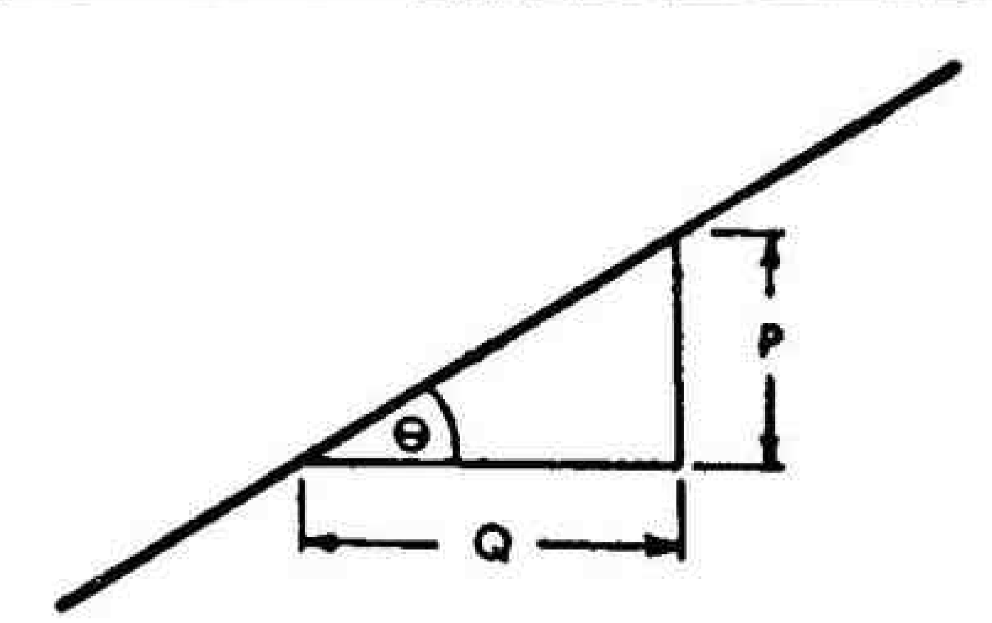


Fig. 169. La pendiente de una línea recta es la razón: $\frac{P}{Q}$.

4. Wolf, *History of Philosophy, Science and Technology in the Sixteenth and Seventeenth Centuries*, página 350.
5. De este modo tenemos, en esencia, una función continua sin derivada, página 367.

EPÍLOGO

LA MATEMÁTICA Y LA IMAGINACIÓN

No hay conclusión. ¿Qué cosa ha concluido, con respecto a la cual podamos llegar a una conclusión? No hay fortunas que puedan predecirse, ni consejos que puedan darse. Adiós.

WILLIAM JAMES

"Minino de Cheshire", comenzó ella algo tímidamente... "Me dirás por favor, ¿qué camino debo tomar para irme de aquí?"

"Eso depende mucho de dónde quieras ir", dijo el gato."

"Poco me preocupa dónde ir", contestó Alicia.

"Entonces, nada importa qué camino tomes", replicó el gato.

LEWIS CARROLL

¿Qué es la matemática? Contestar a esta pregunta supone aludir a una enorme y variada extensión del pensamiento, que ha venido desarrollándose desde las épocas más remotas. Pero después de examinar todas las opiniones que se escalonan desde las de Pitágoras hasta las teorías de las más recientes escuelas de filosofía matemática, se pone de manifiesto la triste realidad de que es más fácil ser inteligente que claro. En los últimos tiempos, sobre todo, ha habido una tendencia a presentar epigramas en lugar de respuestas claras, aforismos que, desgraciadamente, arrojan poca luz. En el

método de encarar el problema reside el principal obstáculo a una respuesta satisfactoria. Si uno fuese a preguntar: "¿Qué es la biología?" sería comparativamente sencillo, partiendo de una definición etimológica y luego agrupando el gran cuerpo de conocimientos comprendidos en las ciencias biológicas, llegar a una conclusión de cómo se sintetizan todos los ítems en una ciencia completa. Aun una explicación imperfecta tal como: "La biología es la ciencia que estudia los caballos, murciélagos, narcisos y ballenas", daría una idea razonable de lo que se trata. Por otra parte, el estudio de las matemáticas —aritmética, álgebra, geometría, cálculo— no aclara más sobre su naturaleza que decir que se interesa por los números y que constituye una técnica útil. En lo tocante al concepto de número, no se ha dado aún una definición que, en sí misma, simplifique la tarea de definir las matemáticas.

Aquí, pues, en matemáticas, tenemos un idioma universal, válido, útil e inteligible en todas partes, en el espacio y en el tiempo —en los bancos y compañías de seguros, en los pergaminos de los arquitectos que levantaron el templo de Salomón y en las copias heliográficas de los ingenieros que, con sus cálculos, dominan los vientos. Aquí hay una disciplina para centenares de ramas, fabulosamente rica, literalmente sin límites en su esfera de aplicación, cargada de honores por una ininterrumpida "relación" de magníficas realizaciones. Aquí hay una creación de la mente, a la vez mística y filosófica en recursos. Rígida e imperiosa como la lógica, es todavía suficientemente sensitiva y flexible para satisfacer cualquier nueva necesidad. Sin embargo, este enorme edificio descansa sobre los fundamentos más simples y más primitivos, está forjado por la imaginación y la lógica de un puñado de reglas infantiles. Aun cuando hasta ahora ninguna definición ha abarcado sus fines o su naturaleza, ¿puede ser que la incógnita: "Qué es la matemática" quede sin respuesta?

No es sorprendente que las matemáticas disfruten de un prestigio inigualado por ningún otro vuelo del pensamiento. Han hecho posibles tantos adelantos en las ciencias, son a la vez tan indispensables en los asuntos prácticos, y son tan fácilmente obra maestra de abstracción pura, que el reconocimiento de su preeminencia entre todas las conquistas intelectuales del hombre no es otro que el debido.

A pesar de esta preeminencia, la primera estimación significativa de las matemáticas tuvo lugar recientemente con motivo del advenimiento de las geometrías no euclidianas y de más de tres dimensiones. Esto no quiere decir que deban menospreciarse los progresos logrados por el cálculo, la teoría de la probabilidad, la aritmética del infinito, la topología y otros temas que hemos tratado. Cada uno de ellos ha ampliado el dominio de las matemáticas y ha profundizado su significación así como nuestra comprensión del universo físico. Sin embargo, ninguna de ellas ha contribuido a la introspección matemática, al conocimiento de la relación entre sí y con respecto al todo de las partes que constituyen las matemáticas, tanto como las herejías no euclidianas.

Como resultado del espíritu valerosamente crítico que originó estas herejías, hemos superado la noción de que las verdades matemáticas tienen existencia independiente y aparte de nuestras propias mentes. Todavía nos resulta extraño que semejante noción pudiera haber existido alguna vez. Sin embargo, esto es lo que Pitágoras debió haber pensado —y Descartes, como asimismo centenares de otros grandes matemáticos anteriores al siglo XIX. Hoy las matemáticas son ilimitadas: han roto sus cadenas. Cualquiera que sea su esencia, reconocemos que son tan libres como la mente y tan prensiles como la imaginación. La geometría no euclidiana es una demostración de que las matemáticas, a diferencia de la música de las esferas, es el artificio propio del hombre sometido sólo a las limitaciones de las leyes del pensamiento.

La filosofía que lleva el nombre de positivismo lógico ha preparado un formidable programa: primero, eliminar la metafísica de la filosofía; y segundo, presentar las relaciones mutuas entre las leyes del pensamiento (es decir, la lógica) y las matemáticas. Algunos creen que en la evaluación de la naturaleza de las matemáticas el positivismo lógico representa un progreso mayór que el realizado por la geometría no euclidiana. Aunque muy modestamente, se ha expresado la esperanza de que aquí hay, al menos, una doctrina que encara con toda equidad las dificultades esenciales e inherentes que obstruyen el camino hacia la cumbre.

Purificando a la filosofía matemática de la metafísica, ha habido (a nuestro juicio), una ganancia real. Ya no se considerará más a las matemáticas como una clave de la verdad con *V* mayúscula. Ahora puede ser considerada como una guía desastrosamente incompleta, aunque enormemente útil, de un país que en su mayor parte permanece inexplorado. Se han fijado algunas señales. La vasta red de caminos es parcialmente comprensible; hay señales para el perplejo viajero.

Por otra parte, uno no puede reprimir la sensación de que esta nueva apreciación de las matemáticas es tan incompleta, tan desprovista de colorido, que resulta casi trivial e inconsecuente. Al considerarlas simplemente como un puñado de proposiciones primitivas e indefinidas, unidas con una metodología para crear otras nuevas, parece que se ha perdido algo del espíritu, del gusto y del color de las matemáticas. Mientras tanto, quienes se oponen al positivismo lógico, admiten que sirve alguna finalidad, pero atacan el aturdimiento del raciocinio y la limitación de horizontes que inevitablemente impone. Nosotros compartimos la opinión de que las matemáticas, más que una fábrica de tautologías, constituyen un vehículo para llevar a cabo las más elevadas aspiraciones del intelecto creador.

En pocas palabras, he aquí lo que dice el positivista: La lógica se ocupa de las reglas formales para manejar los símbolos del idioma. Las matemáticas sólo se ocupan de las ecuaciones; es decir, literalmente, de proposiciones de equivalencia de números.

Todas las relaciones de significado, esenciales e internas, son de incumbencia de la ciencia matemática. Un ser omnisciente no necesitaría, pues, ni lógica ni matemáticas, ya que las relaciones entre todas las entidades serían, para él, evidentes en sí mismas. Aun cuando pudiera encontrar todavía útiles a otras ciencias, como, por ejemplo, la biología para proveerle de un catálogo de seres vivientes, o una guía telefónica para ayudarle a encontrar a sus amigos, habría desaparecido su necesidad de la lógica y de las matemáticas. Porque una vez que todo el significado y todas las relaciones fuesen plenamente descubiertas, estas disciplinas resultarían superfluas.

¿No existe, acaso, razón para pensar que en semejante interpretación, aun cuando nos hemos flagelado despiadadamente y ahuyentado el confuso espíritu de la metafísica, podemos también haber empobrecido la vitalidad de las matemáticas? ¿No podemos haber perdido también "el espíritu en la palabra"?

Como ya lo hemos señalado, la creación de la geometría no euclidiana singularizó la verificación de que las matemáticas en ningún sentido dependen de nuestro medio ambiente. Aunque existen muchas semejanzas entre el comportamiento de los fecundos y pequeños símbolos que escribimos sobre el papel o que juegan en nuestras cabezas y aquellos fenómenos que tienen lugar en el mundo físico, las matemáticas deben ser reconocidas como una disciplina autónoma, restringida sólo por las reglas formales del pensamiento. El

desarrollo de las matemáticas es una imagen de la lucha eterna por mayor entendimiento y mayor libertad: de lo particular a lo general; desde las figuras limitadas por líneas rectas hasta las curvas patológicas; de las propiedades de ésta o aquella figura determinada a las propiedades de *todas* las figuras; de una dimensión a *n* dimensiones; desde lo finito hasta lo infinito. En esta marcha la imaginación ha desempeñado un notable papel. Porque la imaginación tiene el valor pragmático de adelantarse a la lenta caravana del pensamiento bien ordenado y frecuentemente reconoce la realidad antes que su pesado amo. En eso consiste su contribución esencial a una de las más extrañas colaboraciones del pensamiento: las sosegadas matemáticas y el vuelo de la imaginación.

Las matemáticas constituyen una actividad regida por las mismas reglas impuestas a las sinfonías de Beethoven, las pinturas de Da Vinci y las poesías de Homero. Así como las escalas, las leyes de la perspectiva y las reglas del metro parecen carecer de vitalidad y ardor, podrá parecer que las reglas formales de las matemáticas son tediosas. Sin embargo, finalmente, las matemáticas alcanzan pináculos tan elevados como los logrados por la imaginación de sus más osados exploradores. Y aquí se encierra, quizá, la última paradoja de la ciencia, puesto que en su prosaico tráfago, tanto la lógica como las matemáticas dejan atrás, frecuentemente, a su avanzada y muestran que el mundo de la razón pura es más extraño aún que el mundo de la fantasía pura.

BIBLIOTECA CIENTÍFICA SALVAT

1. **Stephen Hawking.** *Una vida para la ciencia.* Michael White y John Gribbin
2. **La verdadera historia de los dinosaurios.** Alan Charig
3. **La explosión demográfica.** *El principal problema ecológico.* Paul R. Ehrlich y Anne H. Ehrlich
4. **El monstruo subatómico.** *Una exploración de los misterios del Universo.* Isaac Asimov
5. **El gen egoísta.** *Las bases biológicas de nuestra conducta.* Richard Dawkins
6. **La evolución de la física.** Albert Einstein y Leopold Infeld
7. **El secreto del Universo.** *Y otros ensayos científicos.* Isaac Asimov
8. **Qué es la vida.** Joël de Rosnay
9. **Los tres primeros minutos del Universo.** Steven Weinberg
10. **Dormir y soñar.** *La mitad nocturna de nuestras vidas.* Dieter E. Zimmer
11. **El hombre mecánico.** *El futuro de la robótica y la inteligencia humana.* Hans Moravec
12. **La superconductividad.** *Historia y leyendas.* Sven Ortoli y Jean Klein
13. **Introducción a la ecología.** *De la biosfera a la antroposfera.* Josep Peñuelas
14. **Miscelánea matemática.** Martin Gardner
15. **El Universo desbocado.** *Del Big Bang a la catástrofe final.* Paul Davies
16. **Biotecnología.** *Una nueva revolución industrial.* Steve Prentis
17. **El telar mágico.** *El cerebro humano y la computadora.* Robert Jastrow
18. **A través de la ventana.** *Treinta años estudiando a los chimpancés.* Jane Goodall
19. **Einstein.** Banesh Hoffmann
20. **La doble hélice.** *Un relato autobiográfico sobre el descubrimiento del ADN.* James Watson
21. **Cien mil millones de soles.** *Estructura y evolución de las estrellas.* Rudolf Kippenhahn
22. **El planeta viviente.** *La adaptación de las especies a su medio.* David Attenborough
23. **Evolución humana.** Roger Lewin
24. **El divorcio entre las gaviotas.** *Lo que nos enseña el comportamiento de los animales.* William Jordan
25. **Lorenz.** Alec Nisbett
26. **Mensajeros del paraíso.** *Las endorfinas, drogas naturales del cerebro.* Charles F. Levinthal
27. **El Sol brilla luminoso.** Isaac Asimov
28. **Ecología humana.** *La posición del hombre en la naturaleza.* Bernard Campbell

29. **Sol, lunas y planetas.** Erhard Keppler
30. **Los secretos de una casa.** *El mundo oculto del hogar.* David Bodanis
31. **La cuarta dimensión.** *Hacia una geometría más real.* Rudy Rucker
32. **El segundo planeta.** *El problema del aumento de la población mundial.* U. Colombo y G. Turani
33. **La mente (I).** Anthony Smith
34. **La mente (II).** Anthony Smith
35. **Introducción a la química.** Hazel Rossotti
36. **El envejecimiento.** David P. Barash
37. **Edison.** Fritz Vögtle
38. **La inestable Tierra.** *Pasado, presente y futuro de las catástrofes naturales.* Basil Booth y Frank Fitch
39. **Gorilas en la niebla.** *13 años viviendo entre los gorilas.* Dian Fossey
40. **El espejo turbulento.** *Los enigmas del caos y el orden.* John Briggs y F. David Peat
41. **El momento de la creación.** *Del Big Bang hasta el Universo actual.* James S. Trefil
42. **Dios y la nueva física.** Paul Davies
43. **Evolución.** *Teorías sobre la evolución de las especies.* Wolfgang Schwoerbel
44. **La enfermedad, hoy.** Lluís Daufí
45. **Iniciación a la meteorología.** Mariano Medina
46. **Los niños de Urania.** *En busca de las civilizaciones extraterrestres.* Evry Schatzman
47. **Amor y odio.** *Historia natural del comportamiento humano.* Irenäus Eibl-Eibesfeldt
48. **Matemáticas e imaginación (I).** Edward Kasner y James Newman
49. **Matemáticas e imaginación (II).** Edward Kasner y James Newman

EX LIBRIS Scan Digit



The Doctor

Libros, Revistas, Intereses:
http://thedoctorwho1967.blogspot.com.ar/


BRIAN SMITH





No es sorprendente que las matemáticas disfruten de un prestigio no igualado por ninguna otra actividad del pensamiento, pues son a la vez indispensables en los asuntos prácticos y la obra maestra de la abstracción pura. Sin embargo, el matemático suele ser considerado como una especie de ermitaño que invierte su tiempo creando teorías enrevesadas en una jerga árida e ininteligible.

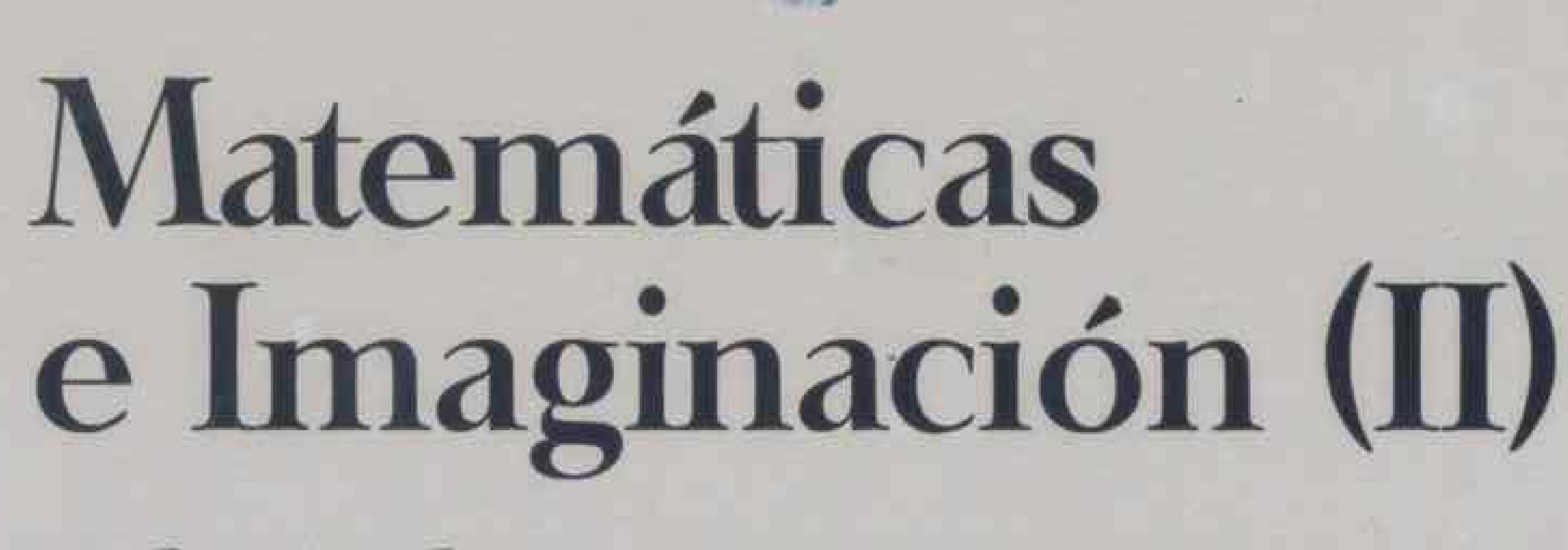
Al concebir este libro, Edward Kasner y James Newman –ambos matemáticos de gran renombre– se propusieron ofrecer una panorámica de los diversos campos de la matemática en un lenguaje comprensible y ameno. El resultado fue un best-seller que se ha convertido en un clásico de la literatura de divulgación científica y que, a buen seguro, despertará –o aumentará– nuestro interés por esta arrogante reina del mundo intelectual.

Matemáticas e Imaginación (II)

E. Kasner J. Newman

49





Matemáticas e Imaginación (II)

Edward Kasner
James Newman

Biblioteca Científica Salvat

No es sorprendente que las matemáticas disfruten de un prestigio no igualado por ninguna otra actividad del pensamiento, pues son a la vez indispensables en los asuntos prácticos y la obra maestra de la abstracción pura. Sin embargo, el matemático suele ser considerado como una especie de ermitaño que invierte su tiempo creando teorías enrevesadas en una jerga árida e ininteligible.

Al concebir este libro, Edward Kasner y James Newman –ambos matemáticos de gran renombre– se propusieron ofrecer una panorámica de los diversos campos de la matemática en un lenguaje comprensible y ameno. El resultado fue un best-seller que se ha convertido en un clásico de la literatura de divulgación científica y que, a buen seguro, despertará –o aumentará– nuestro interés por esta arrogante reina del mundo intelectual.

Matemáticas e Imaginación (II)

E. Kasner
J. Newman





Matemáticas e Imaginación (II)

Edward Kasner
James Newman

Biblioteca
Científica
Salvat

No es sorprendente que las matemáticas disfruten de un prestigio no igualado por ninguna otra actividad del pensamiento, pues son a la vez indispensables en los asuntos prácticos y la obra maestra de la abstracción pura. Sin embargo, el matemático suele ser considerado como una especie de ermitaño que invierte su tiempo creando teorías enrevesadas en una jerga árida e ininteligible.

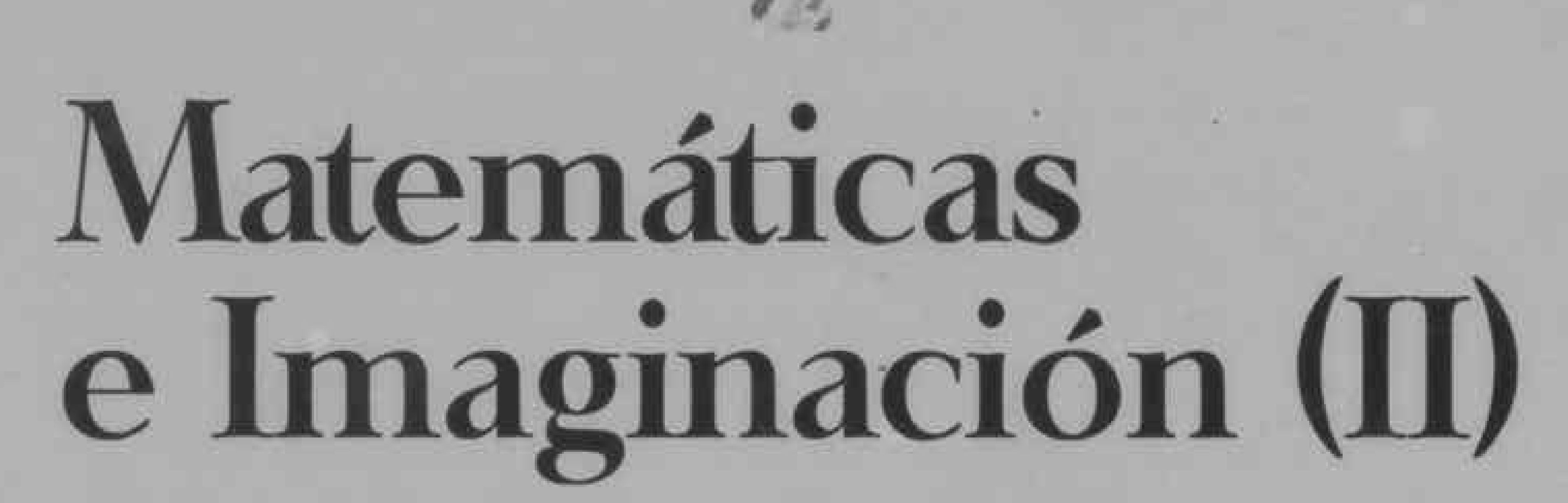
Al concebir este libro, Edward Kasner y James Newman –ambos matemáticos de gran renombre– se propusieron ofrecer una panorámica de los diversos campos de la matemática en un lenguaje comprensible y ameno. El resultado fue un best-seller que se ha convertido en un clásico de la literatura de divulgación científica y que, a buen seguro, despertará –o aumentará– nuestro interés por esta arrogante reina del mundo intelectual.

Matemáticas e Imaginación (II)



49





Matemáticas e Imaginación (II)

Edward Kasner
James Newman

Biblioteca Científica Salvat

No es sorprendente que las matemáticas disfruten de un prestigio no igualado por ninguna otra actividad del pensamiento, pues son a la vez indispensables en los asuntos prácticos y la obra maestra de la abstracción pura. Sin embargo, el matemático suele ser considerado como una especie de ermitaño que invierte su tiempo creando teorías enrevesadas en una jerga árida e ininteligible.

Al concebir este libro, Edward Kasner y James Newman –ambos matemáticos de gran renombre– se propusieron ofrecer una panorámica de los diversos campos de la matemática en un lenguaje comprensible y ameno. El resultado fue un best-seller que se ha convertido en un clásico de la literatura de divulgación científica y que, a buen seguro, despertará –o aumentará– nuestro interés por esta arrogante reina del mundo intelectual.

Matemáticas e Imaginación (II) E. Kasner J. Newman 49



Matemáticas e Imaginación (II)

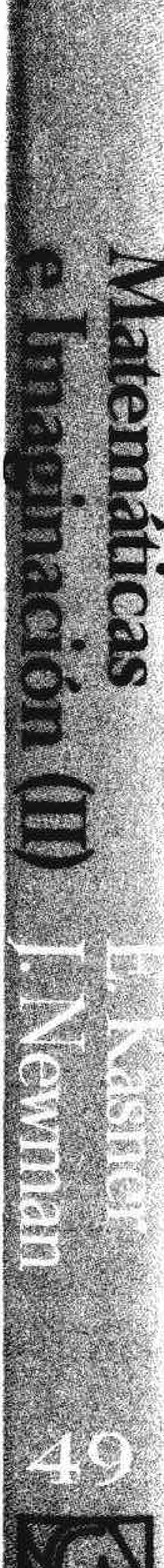
Edward Kasner
James Newman

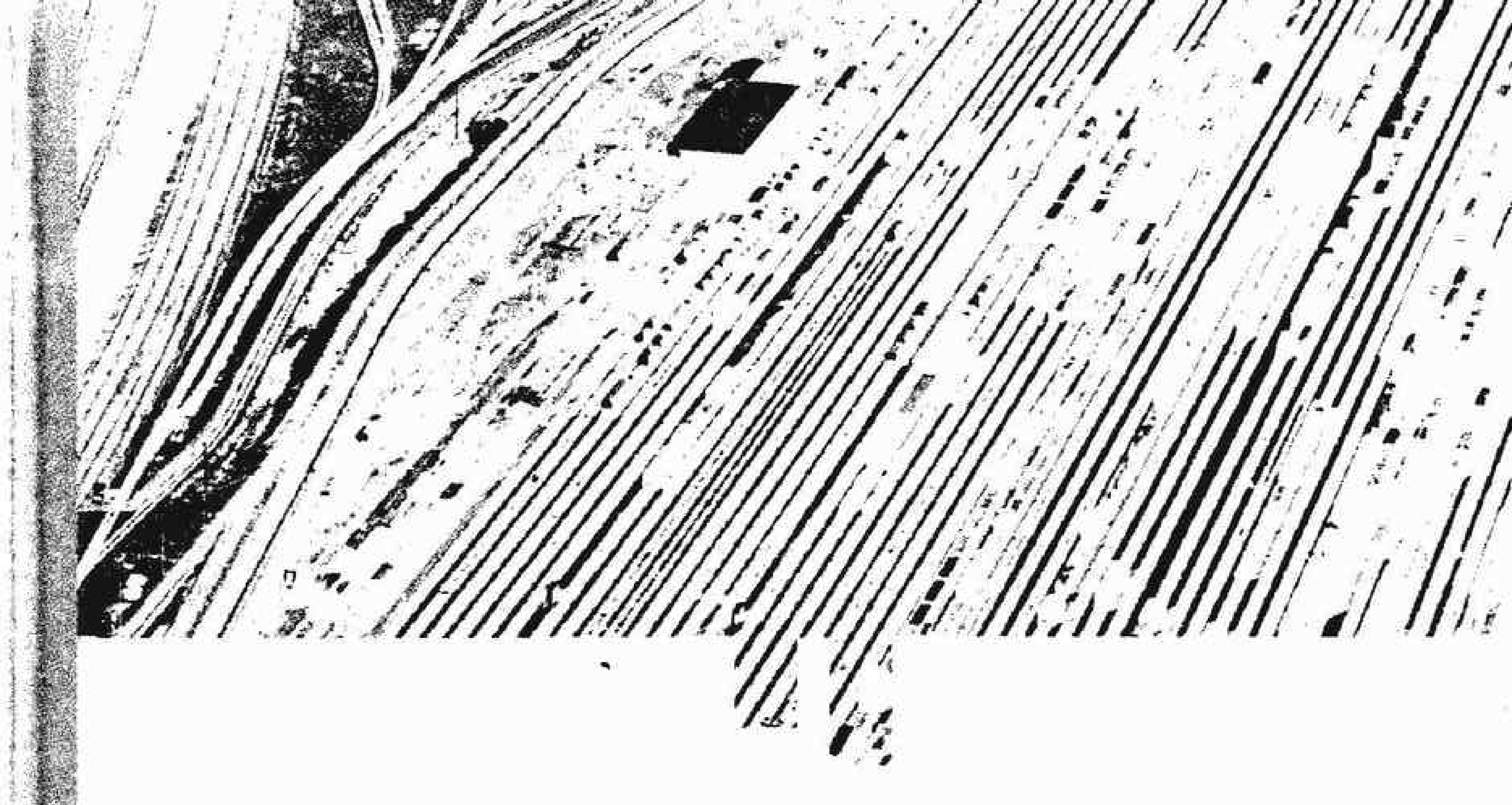
Biblioteca Científica Salvat



No es sorprendente que las matemáticas disfruten de un prestigio no igualado por ninguna otra actividad del pensamiento, pues son a la vez indispensables en los asuntos prácticos y la obra maestra de la abstracción pura. Sin embargo, el matemático suele ser considerado como una especie de ermitaño que invierte su tiempo creando teorías enrevesadas en una jerga árida e ininteligible.

Al concebir este libro, Edward Kasner y James Newman –ambos matemáticos de gran renombre– se propusieron ofrecer una panorámica de los diversos campos de la matemática en un lenguaje comprensible y ameno. El resultado fue un best-seller que se ha convertido en un clásico de la literatura de divulgación científica y que, a buen seguro, despertará –o aumentará– nuestro interés por esta arrogante reina del mundo intelectual.





Matemáticas e Imaginación (II)

Edward Kasner
James Newman

Biblioteca Científica Salvat